TD n° 1 : Approximation numérique des fonctions

Exercice 1. Formules de Taylor - Rappels

a) (Théorème de Cauchy) Soient les fonctions $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ dérivables en tout point de l'intervalle $]a,b[$. Si $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$, alors il existe (au moins) un point $\xi \in]a,b[$ où on a l'égalité :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{1}$$

(Indication : on pourra chercher à appliquer le théorème de Rolle à une fonction astucieusement choisie).

b) Rappelons la formule de Taylor avec reste intégral : Soit f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$. Pour tout $t \in [a,b]$ on a alors :

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,dx. \tag{2}$$

Utiliser cette formule pour en déduire pour $\alpha \in C^2([0,1])$:

$$s\alpha(1) + (1-s)\alpha(0) - \alpha(s) = (1-s)\int_0^s x\alpha''(x)dx + s\int_s^1 (1-x)\alpha''(x)dx$$

pour tout $s \in]0,1[$. Montrer que, si $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$ et $\max_{x\in[0,1]} |\alpha''(x)| \leq M_2$, nous avons l'estimation suivante :

$$|\alpha(s)| \leq \frac{1}{8} M_2 \quad \forall s \in]0,1[.$$

c) Rappelons la formule de Taylor-Lagrange : Soit f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$. Alors, pour tout $t \in [a,b]$, il existe (au moins) un point $\xi \in]a,t[$ où on a l'égalité :

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi). \tag{3}$$

Utiliser cette formule pour obtenir les estimations suivantes :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \geq 0,$$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \forall x \geq 0,$$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Exercice 2. Propriété des polynômes de base

Soient $k \in \mathbf{N}$ et $l_0, ..., l_k$ les polynômes de base k associés aux $k+1$ points $c_0, ...c_k$ sur l'intervalle $[a, b]$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\sum_{j=0}^{k} l_j(x) = 1.$$

Exercice 3. Soient $x_0 \in \mathbf{R}$ et $h > 0$. Montrer que si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire

$$f(x) = p_n(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0,$$

alors $\Delta^n p_n(x_0) = n! c_n h^n$ et $\Delta^m p_n(x_0) = 0$ pour tout $m > n$. Calculer les différences divisées du polynôme $p(x) = x^3$.

Exercice 4. Polynômes de Lagrange et de Hermite

Soit $\epsilon \in]0, 1[$ et f une fonction C^3 sur $[0, 1]$. On note

$$a = f(0), \quad b = f(1) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in]0,1[} |f^{(3)}(x)|.$$

a) Déterminer le polynôme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points 0, ϵ et 1.

b) On note $E_1(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0, 1]$ lorsqu'on approxime $f(x)$ par $P_\epsilon(x)$. Donner une majoration de $|E_1(x)|$ en fonction de M et ϵ.

c) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que pour chaque x de l'intervalle $[0, 1]$,

$$\lim_{\epsilon -> 0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$

d) Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré ≤ 2 vérifiant

$$P(0) = a, \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = b$$

Ce polynôme est appelé *polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f relativement aux points* $0, 1$ *et aux entiers* $1, 0$, ce qui signifie qu'on approche f à l'ordre 1 au point 0 et à l'ordre 0 au point 1.

e) On note $E_2(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0, 1]$ lorsqu'on approxime f par P. Donner une majoration de $|E_2(x)|$ en fonction de M.

(Indication : considérer la fonction φ définie par $\varphi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x^2(x-1)} t^2(t - 1)$ pour $x \in]0, 1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in [0, 1]$ tel que $\varphi^{(3)}(\xi) = 0$).

Exercice 5. Une propriété extrémale des points de Tchebichev

On rappelle que pour $x \in [-1,1]$, le n-ième polynôme de Tchebichev est donné par $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Ces polynômes vérifient de nombreuses propriétés déjà vues (en cours et en TD). Si on note, pour $n \geq 0$

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2^n} T_{n+1}$$

alors Q_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ unitaire. On rappelle que T_{n+1} (ou Q_{n+1}) admet $n+1$ racines distinctes qui sont dans $[-1,1]$ données par

$$\alpha_{n-i} = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right) \qquad 0 \leq i \leq n$$

de sorte que $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1}$. On peut donc écrire

$$Q_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - \alpha_i).$$

Pour $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ points distincts de $[-1,1]$ on peut introduire le polynôme de degré $n+1$

$$\pi_{x_0, \ldots x_n}(x) := \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i).$$

Avec cette notation on a également $Q_{n+1} = \pi_{\alpha_0, \ldots \alpha_n}$.

Dans le calcul de l'erreur dans l'interpolation d'ordre n aux points $x_0, \ldots, x_n$, on a vu qu'intervenait la quantité $\|\pi_{x_0,\ldots x_n}\|_\infty$. Il est donc naturel de chercher à savoir ce que vaut

$$\alpha_n := \inf_{x_0 < \ldots < x_n} \|\pi_{x_0,\ldots x_n}\|_\infty$$

et surtout de savoir pour quels points ce infimum serait atteint.

Le but de ce problème est de montrer que cet infimum est atteint pour les points de Tchebichev, c'est à dire que

$$\|Q_{n+1}\|_\infty = \inf_{x_0 < \ldots < x_n} \|\pi_{x_0,\ldots x_n}\|_\infty. \tag{4}$$

Pour cela, on va regarder un problème plus général et montrer que les polynômes de Tchebichev (renormalisés) sont encore extrémaux.

Notons C_n l'espace des polynômes qui sont de degré n et unitaires. On va montrer que

$$\|Q_{n+1}\|_\infty = \inf_{P \in C_{n+1}} \|P\|_\infty. \tag{5}$$

1. Montrer que si on a (5), alors on a (4).

   Si f est une fonction continue sur $[-1,1]$, on dit que f *équioscille sur* $k+1$ *points* s'il existe $k+1$ réels $y_0 < y_1 < \ldots < y_k$ de $[-1,1]$ tels que

   $$\forall i \in \{0,\ldots,k\}\,, \quad |h(y_i)| = \|h\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \{0, k-1\}\,, \quad h(y_{i+1}) = -h(y_i)\,.$$

   (On dit que les extrema sont alternés).

2. Dessiner une fonction qui equioscille. Montrer que si f equioscille, alors $\min_{[-1,1]} f = -\max_{[-1,1]} f$.
3. (a) Rappeler ce que vaut $\|T_{n+1}\|_\infty$.
   (b) Montrer que T_{n+1} equioscille sur $n+2$ points.
   (c) Montrer que Q_{n+1} equioscille sur $n+2$ points.
4. Soit Q un élément de C_{n+1} qui equioscille sur $n+2$ points notés $y_0 < \ldots < y_{n+1}$. Quitte à prendre $-Q$ on supposera que $Q(y_0) = +\|Q\|_\infty$.
   Supposons qu'il existe $P \in C_{n+1}$ tel que $\|P\|_\infty < \|Q\|_\infty$.
   (a) Montrer que $P(y_i) < Q(y_i)$ pour i pair, et $P(y_i) > Q(y_i)$ pour i impair.
   (b) Montrer que $P - Q$ s'annule au moins $n+1$ fois.
   (c) Aboutir à une contradiction.
5. En déduire que si $Q \in C_{n+1}$ equioscille sur $n+2$ points, alors $\|Q\| = \inf_{P \in C_{n+1}} \|P\|_\infty$.
6. Montrer qu'on a (5).

Exercice 6. Orthogonalité des polynômes de Tchebychev

Soit E l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[-1,1]$ à valeurs réels.

1. Montrer que pour toute fonction h de E, l'application $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur]-1,1[.
   Pour f et g éléments de E, on pose
   $$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$
2. a) Soit h une fonction positive de E. Montrer que si
   $$\int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0,$$
   alors h est la fonction nulle.
   b) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
   Ceci nous permet de définir une norme euclidienne sur E : pour tout élément h de E, on pose $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h\rangle}$.
3. Calculer $\langle T_n, T_m\rangle$, selon les valeurs des entiers naturels m et n. En déduire pour tout entier naturel n que la famille $(T_0, ..., T_n)$ est une base orthogonale (pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$) de $\mathbf{R}_n(x)$ (polynômes de degré n à coefficients réels).