TD n° 2 : Intégration numérique

Exercice 1. Formule de la moyenne

Soient f et g deux fonctions réelles continues sur un segment $[a, b]$. On suppose que g ne change pas de signe dans $[a, b]$ (c'est-à-dire, $g \geq 0$ sur $[a, b]$ ou $g \leq 0$ sur $[a, b]$). Alors, il existe un point $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Exercice 2. Formules de quadrature symétriques

On dit que la formule de quadrature

$$\int_0^1 g(t)\, dt \sim \sum_{i=1}^{s} b_i\, g(c_i) \tag{1}$$

est symétrique si $c_i = 1 - c_{s+1-i}$ et $b_i = b_{s+1-i}$ pour tout $1 \leq i \leq s$. Démontrer que toute formule de quadrature de la forme (1) et symétrique est d'ordre impair.

Exercice 3.

Soit $f \in C^1([0, 1]$. On considère la formule de quadrature élémentaire :

$$\int_0^1 f(x)\, dx \sim w_0 f(0) + w_1 f(\xi) + w_2 f'(0)$$

où $\xi \in]0, 1[$ et w_0, w_1, w_2 sont des réels. On pose

$$E(f) = \int_0^1 f(x)\, dx - [w_0 f(0) + w_1 f(\xi) + w_2 f'(0)]$$

a) Déterminer les paramètres ξ, w_0, w_1, w_2 pour que la formule de quadrature soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

b) Les paramètres ξ, w_0, w_1, w_2 étant ainsi fixés, calculer $E(x \to x^4)$ et en déduire l'ordre de la méthode. Déterminer le noyau de Peano K associé à la méthode.

c) En déduire une expression de l'erreur $E(f)$ lorsque $f \in C^4([0, 1])$.

d) A l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle $[a, b]$ et donner la valeur de l'erreur.

Exercice 4.

On considère la méthode de Simpson sur l'intervalle $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \sim 2\left(\frac{1}{6}f(-1) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{6}f(1)\right)$$

a) Calculer l'ordre de la méthode r.

b) Determiner le noyau de Peano et montrer qu'il garde un signe constant.

c) En déduire l'expression de C_r et l'erreur de cette méthode.

Exercice 5.

Démontrer que si une méthode élémentaire symétrique sur $[-1, 1]$ est d'ordre r avec r impair, le noyau de Peano k_r est une fonction paire.

Indication. On démontrera et pourra utiliser que pour toute fonction f, nous avons $E(f) = E(\tilde{f})$, où $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Exercice 6.

a) Soit $\alpha_i, i = 1 \ldots 4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in \mathcal{P}_3$ vérifiant les égalités :

$$p(1/2) = \alpha_1, \quad p(1) = \alpha_2, \quad p'(0) = \alpha_3, \quad p'(1/2) = \alpha_4. \tag{2}$$

b) Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathcal{P}_3, i = 1 \ldots 4$ vérifiant les relations (2), avec respectivement :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1). \tag{3}$$

Montrer que le polynôme de la question **a)** s'écrit comme une combinaison linéaire de p_i :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, p_i(x). \tag{4}$$

c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0, 1])$ et soit p_f le polynôme de la question **a)** avec :

$$\alpha_1 = f(1/2), \quad \alpha_2 = f(1), \quad \alpha_3 = f'(0), \quad \alpha_4 = f'(1/2). \tag{5}$$

Montrer que pour chaque point $x \in]0, 1[$, il existe un point $\xi_x \in]0, 1[$ où on a l'égalité :

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = (x - 1/2)^2(x-1)(x + 1/5). \tag{6}$$

Indication. On pourra considérer la fonction

$$g(t) = f(t) - p_f(t) - \frac{f(x) - p_f(x)}{\pi(x)}\pi(t)$$

pour tout $t \in [0,1]$.

d) On approxime l'intégrale d'une fonction f à l'aide de la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx \sim \int_0^1 p_f(x)dx. \tag{7}$$

Montrer que cette formule est exacte pour les polynômes de $\mathcal{P}_3$. Calculer les poids $w_i = \int_0^1 p_i(x)dx$, $i = 1, \ldots, 4$ et en déduire une forme explicite de la formule de quadrature.

e) Calculer le noyau de Peano de la méthode élémentaire. En déduire l'expression de l'erreur.

f) Soit maintenant $[a,b]$ un intervalle fermé, borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([a,b])$. En utilisant les résultats précédents, construire une formule de quadrature de la forme :

$$J(f) = \gamma_1 f((a+b)/2) + \gamma_2 f(b) + \gamma_3 f'(a) + \gamma_4 f'((a+b)/2), \tag{8}$$

qui soit exacte pour les polynômes de $\mathcal{P}_3$. Calculer l'erreur

$$E(f) = \int_a^b f(x)\,dx - J(f). \tag{9}$$

g) Soit une discrétisation de l'intervalle $[a,b]$ avec des points équidistants

$$x_i = a + ih, \quad h = (b-a)/n, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Construire une formule de quadrature composée qui utilise les valeurs de $f((x_i + x_{i+1})/2)$, $f(x_{i+1})$, $f'(x_i)$ et $f'((x_i + x_{i+1})/2)$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$. Estimer l'erreur de cette formule de quadrature.