TD n$^{\text{o}}$ 3 : Approximation des solutions d'équations

Exercice 1.

On pose $f(x) = x^3 - 2$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède $2^{1/3}$ (noté a dans la suite) comme seule racine réelle. Calculer $f'(a)$.

b) En utilisant la méthode de Newton, déterminer une fonction φ pour laquelle a est un point fixe.

c) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que sur $J = [a, +\infty[$, on a $0 \leq \varphi'(x) \leq 2/3$. Montrer que $\varphi : J \to J$ et que $3/2 \in J$.

d) On choisit $x_0 = 3/2$, puis on définit $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $x_k \in J$. Calculer x_1 en le mettant sous la forme d'un nombre rationnel. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $x_k \in \mathbf{Q}$.

e) Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers a.

f) Soit $N \in \mathbf{N}$. Déterminer k de sorte que $0 \leq x_k - a \leq 2^{-N}$.

Exercice 2. Points fixes

Déterminer les points fixes et leur nature (attractif ou répulsif) pour les fonctions suivantes :

a) $\varphi_1(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\varphi_2(x) = e^x - 2$, $x > 0$.

c) $\varphi_3(x) = x^2 + \alpha x + 1$, $x \in \mathbf{R}$, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$. Dans cette question on donnera la nature des points fixes (attractif, répulsif ou non déterminé [cas limite]) et on étudiera juste les cas limites avec α naturel entier.

d) Dans la question précédente, on a vu que $\alpha = 1 - 2\sqrt{2}$ constituait un cas limite pour le point fixe $a = \sqrt{2} - 1$. Ici, nous allons étudier la nature du point fixe $\sqrt{2} - 1$ en fonction du choix de $x_0 \in \mathbf{R}$.

d.1) Déterminer les points y pour lesquels $\varphi_3(y) < y$.

d.2) Déterminer les points y pour lesquels $\varphi_3(y) < \sqrt{2} - 1$.

d.3) Montrer que pour $x_0 \in [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}]$, le point $\sqrt{2}-1$ est un point fixe attractif pour φ_3.

Indication : On démontrera que

$$x_1 < x_3 < \cdots < x_{2k+1} < \cdots < \sqrt{2}-1 < \cdots < x_{2k} < \cdots < x_2 < x_0$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$ et on conclura que le point $\sqrt{2}-1$ est attractif. Pour démontrer $x_2 < x_0$, on étudiera la dérivée seconde de la fonction

$$\varphi_3(x_0)^2 + (1-2\sqrt{2})\varphi_3(x_0) + 1 - x_0.$$

On pourra procéder de la même façon pour démontrer $x_1 < x_3$.

d.4) En déduire que pour tout $x_0 \in]\sqrt{2}, \sqrt{2}+1[$, le point fixe $\sqrt{2}-1$ est attractif.

d.5) En déduire que pour tout $x_0 \geq \sqrt{2}+1$ le point fixe $\sqrt{2}-1$ est répulsif.

d.6) Comparer x_1 à $\sqrt{2}+1$ et conclure pour les x_0 restants.

Exercice 3.

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(-y + \frac{1}{2}x^2 - 3, -y - 4x + 2)$.

1. Déterminer les points fixes de ϕ.
2. Ces points fixes sont-ils attractifs ?