Université Pierre-et-Marie-Curie
Licence de Mathématiques LM383
Equations différentielles. Méthodes de résolution numérique.

Travaux dirigés
Année universitaire 2008-2009

TD n°4 : Existence et unicité des solutions d'équations différentielles. Méthodes d'Euler et de Picard.

Exercice 1
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) := a\, t\, x(t) \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où a est une constante non nulle.

1. Trouver la solution exacte $x(t)$ de ce problème. Montrer que pour $a < 0$ on a
$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$
Dans ce qui suit, on considère un temps $T > 0$ fixé et on travaille sur l'intervalle $[0, T]$.
2. *Méthode d'Euler* : On se donne une subdivision régulière de l'intervalle $[0, T]$ de pas constant $h = T/N$.
   (a) Calculer les approchées de la solution de (1) aux points $t_n := nh$:
   $$x_n \sim x(nh) \quad \forall n \in \{0, 1, \cdots, N\}.$$
   (b) Soit $a \neq 0$. En déduire que la solution approchée obtenue par cette méthode
   $$\begin{cases} x_h(t) = x_n + (t - nh) f(nh, x_n) \quad t \in [nh, (n+1)h], \\ n \in \{0, 1, \cdots, N-1\}, \end{cases}$$
   converge vers la solution exacte trouvée dans la première question lorsque $h \to 0^+$.
   (c) Soit $a < 0$. Montrer que
   $$\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = 0$$
   si et seulement si $h < -2/(aT)$.
3. *Méthode de Picard.* Calculer la suite de fonctions continues $x_n(t)$ ($t \in [0, T]$) définie par la méthode des approximations succesives de Picard. En déduire que cette suite converge sur $[0, T]$ vers la solution exacte calculée dans la première question lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2
Les applications suivantes vérifient-elles une condition de Lipschitz globale ? locale ?

1. $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbf{R}$.
3. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$.
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.
5. $f(x) = \dfrac{\log(1 + x)}{2 + x}$, $x \geq 0$.

Exercice 3
On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = y - 2y^2. \tag{2}$$

a) Trouver les solutions constantes $y = C_1$ et $y = C_2$ $(C_1 < C_2)$.

Noter que les graphes des deux solutions constantes trouvées dans **a)** séparent le plan en trois zones.

b) Résoudre l'équation différentielle dans chaque zone.

c) Décrire qualitativement les solutions de (2) dans chaque zone, en précisant leur intervalle de définition.

Exercice 4
Dans cet exercice, nous voulons décrire qualitativement les solutions $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' = \frac{1-y^2}{2x^2}, \tag{3}$$

c'est-à-dire, nous voulons déterminer leur intervalle maximal de définition I ainsi que leur comportement près des bornes de I.

a) Trouver les solutions constantes $y = C_3$ et $y = C_4$ $(C_3 < C_4)$.

b) Résoudre l'équation différentielle dans chaque zone en utilisant la méthode de séparation des variables. Ensuite, on pourra calculer la solution qui satisfait $y(x_0) = y_0$ pour chaque x_0 et chaque $y_0 \neq C_3, C_4$.

c) Zone I : $(x_0, y_0) \in]0, +\infty[\times]C_3, C_4[$. Montrer que $I = [0, +\infty[$.

d) Zone II : $(x_0, y_0) \in]0, +\infty[\times]C_4, +\infty[$. Montrer que pour chaque (x_0, y_0) il existe un point $x_1 \in]0, +\infty[$ tel que la solution de (3) tend vers $+\infty$ en ce point.

e) Zone III : $(x_0, y_0) \in]0, +\infty[\times] - \infty, C_3[$. Montrer qu'il existe une courbe $z(x)$ tel que :

- Pour tout (x_0, y_0) avec $y_0 > z(x_0)$, la solution de (3) qui passe par (x_0, y_0) (c'est-à-dire, qui satisfait $y(x_0) = y_0$) est définie sur $[0, +\infty[$.

- Pour tout (x_0, y_0) avec $y_0 < z(x_0)$, il existe un point $x_2 \in]0, +\infty[$ tel que la solution de (3) qui passe par (x_0, y_0) tend vers l'infini en x_2.

f) Soit $(x_0, y_0) \in] - \infty, 0[\times(\mathbf{R} \setminus \{C_3, C_4\})$. Décrire le comportement des solutions passant par (x_0, y_0) en se ramenant au cas $x_0 > 0$.

Les encadrés ci-dessous décrivent différentes méthodes de résolution d'équations différentielles ordinaires. L'exercice consiste à appliquer ces méthodes aux exemples donnés dans la colonne de droite.

Equations à variables séparées

$$y' = f(y)g(t) \Longrightarrow \frac{dy}{f(y)} = g(t)dt$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{f(y)}}_{G(y)} = \underbrace{\int g(t)dt}_{F(t)} \Longrightarrow y = G^{-1}\left(F(t) + cte\right)$$

Exemples

$$y' = \frac{(1+y^2)}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$ty' = (1+t)y$$

Equations associées à une intégrale première

$$y' = \frac{P(t,y)}{Q(t,y)} \Longrightarrow P(t,y)\,dt - Q(t,y)\,dy = 0 \left(\stackrel{?}{=} dV = \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy\right)$$

il existe une intégrale première V si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial t}$ et la solution est

alors donnée par $V = cte,$ avec $\left[\dfrac{\partial V}{\partial t} = P(t,y),\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -Q(t,y)\right]$

Exemples

$$y' = -\frac{y}{y^2+t}$$

$$y' = -\frac{t+\sin y}{t\cos y}$$

Méthode du facteur intégrant

$$y' = \frac{P(t,y)}{Q(t,y)} \Longrightarrow P(t,y)\,dt - Q(t,y)\,dy = 0 \quad (*)$$

Si $(*)$ n'est pas associée à une intégrale première, on la multiplie par une fonction appropriée $g(t,y)$ de sorte que la nouvelle équation admette une intégrale première, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial y}[P(t,y)g(t,y)] = -\frac{\partial}{\partial t}[Q(t,y)g(t,y)]$$

Exemples

$$y' = \frac{ty+2t}{y^2-t^2}$$

$$y'(ty-t^2) + y^2 - 3ty - 2t^2 = 0$$