TD n°5 : Systèmes d'équations différentielles : résolution et approximation numérique des solutions.

Exercice 1
Soit la matrice 2×2 triangulaire supérieure suivante :

$$A(t) = \begin{pmatrix} b(t) & d(t) \\ 0 & e(t) \end{pmatrix}.$$

Ici, $b, d, e : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont trois fonctions réelles à variables réelles. On considère le système différentiel

$$y' = A(t)y. \tag{1}$$

a) Calculer $R(t, t_0)$, la résolvante associée au système (1).

b) Calculer l'expression de

$$\exp\left\{\int_{t_0}^{t} A(s)\,dx\right\}.$$

c) Conclure que l'identité

$$R(t, t_0) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} A(s)\,dx\right\}$$

n'est pas satisfaite en général en donnant un exemple.

d) Etudier le cas particulier où $d(t) = e(t) - b(t)$.

Exercice 2
a) Résoudre l'équation différentielle du deuxième ordre $y'' + y = (\cos t)^{-3}$ pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

b) Déterminer la solution qui satisfait $y(\pi/4) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 3
On considère l'équation linéaire du troisième ordre

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = 5 \sin t, \tag{2}$$

où y est une fonction de la variable $t \geq 0$.

a) Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre associée à (2).

b) Déterminer la solution générale de (E) par la méthode de variation des constantes.

c) Montrer que (E) admet une unique solution de la forme $At \cos t + Bt \sin t$. La déterminer explicitement.