TD n°6 : Méthodes d'approximation d'EDO

Exercice 1

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases} \quad (1)$$

On suppose que $f \in C^1$ est globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec constante de Lipschitz L . L'existence et l'unicité de $y \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^m)$ vérifiant (1) sont donc assurées.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $h = \frac{T}{N}$. On remarque que si $hL < 1$, l'application $f(t, \cdot)$ est contractante, ce qui nous permet de définir la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suivante :

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé,} \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_0 + (n+1)h, y_{n+1}), & 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Il s'agit du schéma d'Euler implicite.

a) On note $t_n = t_0 + nh$ et $e_n = y_n - y(t_n)$. Montrer que

$$|e_{n+1}| \leq (1 + hL_1)(|e_n| + |\epsilon_n|)$$

où $L_1 = \frac{L}{1-Lh}$ et ϵ_n est donné par

$$\epsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

b) Montrer l'inégalité suivante par récurrence :

$$|e_n| \leq e^{L_1 nh} |e_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L_1(n-1-i)h} (1 + hL_1) |\epsilon_i|, \quad 0 \leq n \leq N.$$

c) Démontrer la convergence de la méthode d'Euler implicite :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty, y_0 \rightarrow y(t_0)} \left(\max_{0 \leq n \leq N} |e_n| \right) = 0.$$

Exercice 2

Soit $f \in C^2$ et globalement lipschitzienne avec constante de Lipschitz L et y une solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On considère le schéma (explicite) du point milieu :

$$y_{n+1} = y_n + hF(nh, y_n, h),$$

où

$$F(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right).$$

D'après un résultat du cours, on sait que l'erreur de ce schéma est estimée comme suit :

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq M\nu(h),$$

où $M := \frac{e^{L_1 T} - 1}{L_1}$ est la constante de stabilité du schéma et $\nu(h)$ est l'erreur de consistance :

$$\nu(h) = \sup_{0 \leq t \leq T-h} \left| F(t, y, h) - \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right|.$$

Démontrer l'estimation de l'erreur suivante :

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq MCh^2,$$

où C est donné par

$$C := \frac{1}{24} \left(7 \sup_{s \in [0, T]} |y^{(3)}(s)| + 3L \sup_{s \in [0, T]} |y''(s)| \right).$$

Indication : On pourra faire des développements de Taylor successifs au point t .

Exercice 3

On considère à nouveau le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

où la fonction f est C^2 de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L .

a) Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $h = \frac{T}{N}$. On définit la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suivante :

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0), \\ y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) \\ y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n), \quad 1 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Majorer l'erreur

$$\varepsilon_0 = y(t_1) - y(t_0) - hf(t_0, y(t_0))$$

et si $n \geq 1$,

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) - 2hf(t_n, y(t_n))$$

en fonction de $M_2 = \|y^{(2)}\|$ et $M_3 = \|y^{(3)}\|$.

b) Montrer que

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \leq Ch^2$$

où la constante C , à déterminer, dépend de M_2 , M_3 , L et T .

Indication : On pourra utiliser le résultat suivant : si l'on a

$$\Theta_{n+1} \leq \Theta_{n-1} + 2hL\Theta_n + \alpha_n$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, Θ_n et α_n sont des réels positifs, alors

$$\Theta_n \leq e^{nLh} \sqrt{\Theta_0^2 + \Theta_1^2} + \sum_{i=1}^n e^{(n-i)Lh} \alpha_i.$$

Exercice 4

Dans cet exercice on étudie la méthode de Strang comme exemple de schéma de décomposition. Soit donc y solution de l'équation

$$y'(t) = f(t, y(t)) + g(t, y(t)),$$

où f et g sont deux fonctions globalement lipschitziennes avec constantes L_1 et L_2 respectivement. Pour le cas particulier de la méthode d'Euler explicite, ce schéma s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_{**} + \frac{h}{2}f(t_n, y_{**}), \\ y_{**} = y_* + hg(t_n, y_*), \\ y_* = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n). \end{cases}$$

a) Ecrire ce schéma sous la forme d'un schéma explicite.

b) Vérifier que la propriété de consistance est satisfaite.

c) Vérifier que la propriété de stabilité est aussi satisfaite. Obtenir en particulier que pour $L_1 = L_2 = 1/4$, la constante de stabilité est inférieure à 1 lorsque $h < 5$.

d) Pour le cas particulier

$$f(t, x) = ax, \quad g(t, x) = bx \quad a, b \in \mathbb{R},$$

montrer que la méthode de Strang est d'ordre 1.

Exercice 5

On considère le schéma de Runge-Kutta défini par le tableau suivant :

$$\begin{array}{l|llll} (M_2) & 1/6 & | & A & \\ (M_3) & 1/2 & | & B & 3/4 \\ (M_4) & 5/6 & | & C & 1 & 1/3 \\ (M) & 1 & | & 1/3 & -1/4 & 2/3 & 1/4 \end{array}$$

avec A, B, C trois nombres réels à déterminer.

a) Décrire les méthodes de quadrature M_2, M_3, M_4 et M et calculer A, B et C .

b) Ecrire l'algorithme qui définit ce schéma numérique.

c) Quel est l'ordre de ce schéma ?

Exercice 6

On considère la méthode de quadrature (M) sur $[0, 1]$ donnée par

$$\int_0^1 f(x) dx \sim af(0) + bf(1/4) + cf(1/2) + df(2/3).$$

a) Déterminer les coefficients a, b, c et d pour que cette méthode soit d'ordre 3.

b) Soient α et β deux nombres réels. On considère la méthode de Runge-Kutta définie par

$$\begin{array}{l|llll} (M_2) & 1/4 & | & 1/4 & \\ (M_3) & 1/2 & | & \beta & -\beta + 1/2 \\ (M_4) & 2/3 & | & 2\alpha & -\alpha + 1/3 & -\alpha + 1/3 \\ (M) & 1 & | & a & b & c & d \end{array}$$

Décrire les méthodes de quadrature M_2 , M_3 et M_4 et donner leur ordre (dépendant de α et de β).

c) Ecrire l'algorithme définissant cette méthode.

d) Trouver a , b , c , d , α et β pour que l'ordre de cette méthode soit supérieur ou égal à 2.

e) Y a-t-il un choix des paramètres qui nous permet de dire que l'ordre de la méthode est supérieur ou égal à 3?