Partiel n°1 (1h30), Jeudi 05/03/09

Exercice 1.

a) Soit $g \in \mathcal{C}^4([0,1],\mathbb{R})$ telle que $g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = 0$. Si $x \in [0,1]$, montrer qu'il existe $\xi_x \in]0,1[$ tel que

$$g(x) = \frac{1}{24} g^{(4)}(\xi_x) x^2 (1-x)^2$$

(Indication : considérer la fonction auxiliaire $h(t) = g(t) - \alpha t^2(1-t)^2$ avec α tel que $h(x) = 0$).

b) Soit $x_0 = a < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = b$ une subdivision de $[a,b]$ de pas maximal δ. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, il existe une unique fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

(i) $\forall i \in \{0,...,n\}$, $\phi_{/[x_i,x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré ≤ 3.

(ii)$\forall i \in \{0,...,n+1\}$, $\phi(x_i) = f(x_i)$ et $\phi'(x_i) = f'(x_i)$.

c) On suppose que $f \in \mathcal{C}^4([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que

$$||\phi - f||_\infty \leq \frac{1}{384} ||f^{(4)}||_\infty \delta^4$$

Exercice 2.

On considère une méthode de quadrature élémentaire

$$\int_{-1}^{1} f(u)du \equiv \alpha(\beta f(u_0) + f(0) + f(u_2))$$

où α et β sont des réels donnés et u_0 et u_2 sont deux points non nuls et distincts de l'intervalle $[-1,1]$.

a) Déterminer les constantes α et β et les points u_0 et u_2 pour que cette formule soit exacte sur les polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Vérifier qu'elle est exactement d'ordre 3.

b) Calculer le noyau de Peano de la méthode ainsi construite.

c) Montrer que la noyau de Peano calculé est positif. En déduire que

$$E(f) \leq \frac{1}{360} \|f^{(4)}\|_\infty.$$

où $E(f)$ désigne l'écart entre l'intégrale exacte de f sur $[-1,1]$ et sa valeur approchée.

d) Décrire la méthode de quadrature élémentaire associée sur un intervalle de la forme $[a_0, a_0+h]$ (et non plus sur $[-1,1]$) et donner dans ce cas l'erreur commise.