

---

## Partiel du 9 Mars (Groupe 2) : Chapitres 1 et 2

---

### Exercice 1.

- a) Calculer le polynôme d'interpolation  $p$  de Lagrange de la fonction sinus aux points  $0, \pi/2, \pi$ .
- b) Déterminer le polynôme de Taylor (noté  $q$ ) de degré 2 de la fonction sinus au point  $\pi/2$ .
- c) Calculer

$$I = \int_0^\pi \sin x \, dx, \quad I_1 = \int_0^\pi p(x) \, dx, \quad I_2 = \int_0^\pi q(x) \, dx.$$

**Exercice 2 :** Soit  $f \in C^0([0, 1])$ . On considère la formule de quadrature suivante :

$$\int_0^1 f(x) \, dx \sim a_1 f(1/3) + a_2 f(2/3) + a_3 f(3/4), \quad (1)$$

où  $a_1, a_2, a_3$  sont des réels.

- a) Déterminer  $a_1, a_2$  et  $a_3$  pour que la formule de quadrature soit au moins d'ordre 2.

Dans la suite de l'exercice, on prendra les valeurs de  $a_1, a_2, a_3$  qui ont été trouvées dans la question précédente.

- b) Calculer  $E(x^3)$  (erreur de la fonction  $x^3$ ) et en déduire l'ordre de la formule.
- c) Calculer le noyau de Peano associé à cette méthode.
- d) Démontrer que  $K$  ne garde pas un signe constant.

Indication : On pourra faire une étude de la croissance et la décroissance de la fonction  $K$  sur chaque intervalle où elle est définie.

- e) Soit  $f \in C^3([0, 1])$ . Calculer une estimation de  $\int_0^1 |K(t)| \, dt$ . En déduire une estimation de  $E(f)$  en fonction de  $M_3 := \max_{x \in [0, 1]} |f^{(3)}(x)|$ .

- f) A l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle  $[a, b]$  et donner la valeur de l'erreur.