Université Pierre-et-Marie-Curie
Licence de Mathématiques LM383
Equations différentielles. Méthodes de résolution numérique.

Année universitaire 2008-2009

PARTIEL n° 2 (1h30), Jeudi 09 Avril 2009

Exercice 1. On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, définie par

$$\phi(x) = x^2 + c \tag{1}$$

où c est un paramètre réel.

a) On suppose $c = \frac{1}{4}$. Représenter graphiquement la fonction ϕ et déterminer son point fixe. Montrer que la suite récurrente définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et par $x_{p+1} = \phi(x_p)$ est croissante. Déterminer sa nature (convergence ou non) en fonction de la valeur de x_0.

b) On suppose $c = 0$. Que dire à présent des suites récurrentes du type $x_{p+1} = \phi(x_p)$ en fonction de la valeur de x_0 ?

Exercice 2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = x^2(t) - 4 \tag{2}$$

avec la condition $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ donné.

a) Quel résultat donne l'application d'un des théorèmes de Cauchy-Lipschitz sur les solutions de (2) ?

b) Montrer que si une solution x de (2) prend la valeur 2 ou -2, alors x est une fonction constante.

c) Déterminer la solution explicite de (2) avec la condition $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ donné. Vérifier en particulier que si $x_0 \notin [-2, 2]$, la solution 'explose' lorsque t tend vers t_f avec

$$t_f = t_0 + \frac{1}{4}\ln(\frac{x_0 + 2}{x_0 - 2})$$

d) Donner en fonction de la position de x_0 par rapport à -2 et 2 l'allure de la solution x de (2).

Exercice 3. Déterminer les solutions du problème de Cauchy

$$y'(t) = y^3(t) - y(t)$$

avec les conditions respectives $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y(0) = 2$. Déterminer l'intervalle de définition maximal et représenter graphiquement les deux fonctions.