Partiel du 6 Avril (Groupe 2) : Chapitres 3 et 4

Barême : Ex1 ([2+2]+[2+2]=8), Ex2 (1,5+1,5+4+[1+1]+[2+1]=12)

Exercice 1 : Points fixes

a) Soit $\varphi(x) = x^2 + x + \beta$.

- Pour chaque valeur de $\beta \in \mathbf{R}$, calculer le ou les points fixes de la fonction φ.

- Déterminer la nature de chaque point fixe (attractif, répulsif ou cas limite). On n'étudiera pas les cas limites.

b) Soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ donné par

$$g(x, y) = \left(-\frac{11}{8}y^2 + \frac{7}{4}x + y + 1, \frac{9}{4}x - \frac{25}{8}y^2 + 4y + 2\right), \ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

- Calculer le ou les points fixes de l'application g.

- Déterminer leur nature.

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle suivante :

$$e^y y' = e^y - 1. \tag{1}$$

On remarque que la seule solution constante de cette équation est la solution nulle.

a) Vérifier si cette équation satisfait les hypothèses du Théorème de Cauchy-Lipschitz global sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire ?

b) Vérifier si cette équation satisfait les hypothèses du Théorème de Cauchy-Lipschitz local. En particulier, étant donné $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, indiquer combien de solutions de (1) satisfont $y(t_0) = y_0$. Justifier la réponse.

c) Résoudre l'équation (1) dans chaque zone par la méthode de séparation de variables. Expliciter la solution satisfaisant $y(t_0) = y_0$.

d) Zone I ($(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$) :

d.1) Déterminer l'intervalle de définition de la solution maximale satisfaisant $y(t_0) = y_0$.

d.2) Pour chaque $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, tracer le graphe de la solution qui satisfait $y(t_0) = y_0$. On pourra étudier le signe de y' et y''.

e) Zone II ($(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times] - \infty, 0[$) :

e.1) Déterminer l'intervalle de définition de la solution maximale satisfaisant $y(t_0) = y_0$. Quel est l'intervalle de définition de la solution qui satisfait $y(1) = \ln(1 - e^{-1})$?

e.2) Pour chaque $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times] - \infty, 0[$, tracer le graphe de la solution qui satisfait $y(t_0) = y_0$.