Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 1
à rendre pour la semaine 12 (20-25/02)

Exercice 1 (Splines cubiques)

1. Calculer l'unique fonction σ sur $\mathbb{R}$ qui a les propriétés suivantes
   (a) σ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $\sigma(t) = 0$ pour $t \leq 0$
   (c) σ est un polynôme de degré au plus égal à 3 pour $t \geq 0$;
   (d) $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{d^3\sigma}{dt^3}(t) = 1$.
2. Soient $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$, un entier $n \geq 2$ et des réels t_i tels que $a < t_1 < \cdots < t_n < b$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions s définies sur $[a, b]$ qui ont les propriétés suivantes :
   (a) s est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$;
   (b) la restriction de s à chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré au plus égal à 3 ;
   (c) la restriction de s à chacun des intervalles $[a, t_1]$ et $[t_n, b]$ est un polynôme de degré au plus égal à 1.

   Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel ; quelle est sa dimension ? On montrera que toute fonction s de $\mathcal{S}$ peut se mettre sous la forme
   $$s(t) = \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \sigma(t - t_i) \ .$$
3. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe une unique fonction s de $\mathcal{S}$ vérifiant
   $$s(t_i) = f(t_i) \ i = 1 \cdots , n \ .$$
   Indication : on écrira le système linéaire que doivent vérifier les coefficients α, β et $\gamma_i, i = 1, \cdots , n$.

Exercice 2 Méthode d'intégration de Gauss

Soit (p_n) la suite de polynômes unitaires, orthogonaux pour le poids $w(x)$ sur $[a,b]$ (**cf. Exercice 4, feuille de TD n^o 2**).
Pour $n \geq 1$ fixé, nous nous proposons d'étudier les méthodes d'intégration de Gauss, utilisant les points $x_i, i = 0, 1, \dots n$, racines de p_{n+1} :

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \sim \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, f(x_i). \tag{1}$$

1. Les poids λ_i étant calculés pour que la formule d'intégration soit exacte pour les polynômes de degré $\leq n$, montrer que
$$\lambda_i = \frac{1}{p'_{n+1}(x_i)} \int_a^b \frac{p_{n+1}(x)}{x - x_i}\, w(x)\,dx.$$
2. De plus, montrer que les choix précédents font que la formule d'intégration de Gauss (**??**) est exacte pour les polynômes de degré $\leq 2n+1$.
3. Montrer que les poids de la formule de quadrature sont positifs.
4. Soit maintenant $Q(x)$ le polynôme de Hermite (**cf. Exercice 2, feuille de TD n^o 3**), pour lequel
$$f(x_i) = Q(x_i) \quad \text{et} \quad f^{'}(x_i) = Q^{'}(x_i), \quad i = 0, 1, \dots n.$$
Montrer que l'erreur d'interpolation est
$$f(x) - Q(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\,[p_{n+1}(x)]^2, \quad \xi \in]a,b[.$$
En déduire une expression de l'erreur d'intégration pour la formule de quadrature de Gauss :
$$E(f) = \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, f(x_i).$$
5. **Application :** Déterminer la formule de quadrature élémentaire de Gauss pour approcher $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ (on pourra observer que le poids utilisé est $w(x) = 1\dots$).
Etudier cette formule pour $n = 1$ (calcul de l'ordre de la méthode, du noyau de Peano et de l'erreur d'interpolation). Comparer avec les formules connues d'intégration à deux points.