Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 2
à rendre semaine 05-09 Juin 2006

I - Méthode de Newton
On souhaite approcher les solutions de l'équation $f(x) = x^3 - x = 0$.
1) Déterminer la fonction ϕ associée à la méthode de Newton. Pour quelles valeurs de x_0 la méthode n'est-elle pas définie ?
2) Montrer qu'il existe deux valeurs de $x_0 \neq 0$ pour lesquelles la suite des itérés est périodique (on cherchera une solution de l'équation $\phi(x) = -x$) et ne permet pas d'obtenir les solutions de $f(x) = 0$. Est-ce contradictoire avec les résultats du cours ?

II - Lemme de Gronwall

1. Soient $K, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$ avec $K > 0$ et $z : [t_0, T] \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive tels que $z(t) \leq \delta + K \int_{t_0}^{t} z(s)ds + \epsilon(t - t_0)$. Montrer que $z(t) \leq \delta \exp K(t - t_0) + \frac{\epsilon}{K}(\exp(K(t - t_0)) - 1)$.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $[t_0, T] \times [a, b]$ et globalement K-lipschitziennes en x telles que $|f(t, x) - g(t, x)| \leq \epsilon$. On note y la solution du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$ avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ et z la solution du problème de Cauchy $z' = g(t, z)$ avec $z(t_0) = z_0$. Montrer que
$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0| e^{K|t-t_0|} + \frac{\epsilon}{K}(e^{K|t-t_0|} - 1).$$
3. Montrer que l'équation $y' = \sin(ty)$ avec condition initiale $y(0) = \frac{1}{10}$ possède une unique solution sur $[0, \frac{1}{2}]$.
4. Résoudre l'équation approchée $z' = tz$ avec condition initiale $z(0) = \frac{1}{10}$.
5. Montrer que l'erreur $E(t) = y(t) - z(t)$ vérifie
$$\sup_{0 \leq t \leq 1/2} |E(t)| \leq 2.10^{-5}.$$

III - Equations différentielles linéaires
On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par
$$(E) \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$
où $\forall t \in \mathbb{R}$, $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, l'application $t \to A(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ω-périodique, et B est une fonction continue et ω-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que la résolvante $R(t, t_0)$ associée à l'équation homogène
$$(E_0) \quad X'(t) = A(t)X(t)$$
vérifie $R(t + \omega, t_0 + \omega) = R(t, t_0)$.
2. Montrer qu'une solution X de (E) est ω-périodique si, et seulement si, il existe t_0 tel que $X(t_0 + \omega) = X(t_0)$.
3. Exprimer, à l'aide de la résolvante R, la solution de (E) qui vérifie $X(0) = X_0$. Montrer que si 1 n'est pas valeur propre de $R(\omega, 0)$, alors il existe une unique valeur X_0 telle que $X(\omega) = X(0) = X_0$.

4. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de $R(\omega, 0)$. Montrer que (E) admet une unique solution périodique, qui vérifie en outre

$$||X(t)|| \leq K \int_0^{\omega} ||B(s)|| ds, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

où K est une constante indépendante de B.

5. On considère l'équation $x'' + x = \sin(\alpha t)$. Calculer la résolvante et trouver la solution générale. Existe-t-il une solution périodique pour tout α ? Expliquer.