
TD n° 1: Dérivation numérique

Exercice 1. Formules de Taylor - Rappels

(Re)démontrez les résultats suivants :

a) (Théorème de Cauchy) Soient les fonctions $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ dérivables en tout point de l'intervalle $]a, b[$. Si $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$, alors il existe (au moins) un point $\xi \in]a, b[$ où on a l'égalité:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (1)$$

(Indication : on pourra chercher à appliquer le théorème de Rolle à une fonction astucieusement choisie).

b) (Formule de Taylor-Lagrange) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Alors, pour tout $t \in [a, b]$, il existe (au moins) un point $\xi \in]a, t[$ où on a l'égalité:

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (2)$$

(Indication : considérer les fonctions $F(x) = f(t) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$ et $G(x) = (t-x)^n$ puis utiliser le théorème de Cauchy).

c) (Formule de Taylor avec reste intégral) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Pour tout $t \in [a, b]$ on a alors:

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) dx \quad (3)$$

(Indication : on pourra intégrer par parties $\int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) dx$).

Exercice 2. Dérivées successives de f et différences finies

Montrer par récurrence que si $f \in \mathcal{C}^k([a, b])$, il existe (au moins) trois nombres réels $\theta \in]0, 1[$, $\theta' \in]-1, 0[$ et $\theta'' \in]-1/2, 1/2[$, tels que:

$$\Delta^k f(x) = h^k f^{(k)}(x + \theta kh)$$

$$\nabla^k f(x) = h^k f^{(k)}(x + \theta' kh)$$

$$\delta^k f(x) = h^k f^{(k)}(x + \theta'' kh)$$

Exercice 3. Construction des schémas de différences finies - Méthode des coefficients indéterminés

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $(n + 1)$ points équidistants de $[a, b]$, d'abscisses $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$, avec le paramètre de discrétisation $h = (b - a)/n$. Les valeurs de f aux points x_i , notées $f_i = f(x_i)$, sont supposées connues. Il a été vu en cours que lorsqu'on approche la dérivée première $f'_i = f'(x_i)$ par l'expression $\delta f(x_i)/h$ et la dérivée seconde $f''_i = f''(x_i)$ par l'expression $\delta^2 f(x_i)/h^2$, on commet une erreur en $O(h^2)$. Le but de cet exercice est d'identifier des schémas, éventuellement plus compliqués, pour lesquelles l'erreur commise est plus petite.

a) Ecrire les développements de Taylor de f_{i+1} , f_{i-1} , f'_{i+1} , f'_{i-1} , f''_{i+1} et f''_{i-1} relativement aux valeurs de f et de ses dérivées successives au point x_i .

b) En déduire les équations que doivent satisfaire a_- , a_0 , a_+ , b_- , b_0 , b_+ , c_- , c_0 , c_+ et R pour que la formule suivante soit vraie :

$$a_+ f_{i+1} + a_0 f_i + a_- f_{i-1} + b_+ f'_{i+1} + b_0 f'_i + b_- f'_{i-1} + c_+ f''_{i+1} + c_0 f''_i + c_- f''_{i-1} + R = 0, \quad (4)$$

et que R , c'est-à-dire l'erreur de troncature, ne contienne que des termes en $O(h^p)$ avec $p \geq 3$.

c) Réécrire le système obtenu à la question précédente en choisissant comme variables auxiliaires b_- , b_+ , c_- et c_+ .

d) Déterminer le schéma de différences finies d'ordre maximum que l'on peut obtenir pour calculer seulement les dérivées premières ($c_+ = c_- = c_0 = 0$). Que peut-on dire du schéma explicite ($b_+ = b_- = 0$)?

e) Déterminer le schéma de différences finies d'ordre maximum que l'on peut obtenir pour calculer les dérivées secondes sans faire intervenir les dérivées premières ($b_+ = b_- = b_0 = 0$). Que peut-on dire du schéma explicite ($c_+ = c_- = 0$)?

f) Quel est l'ordre de précision maximum qui peut être obtenu avec un schéma du type (4) pour calculer les dérivées secondes? Ecrire le schéma correspondant.