TD n° 2: Interpolation numérique

Exercice 1. Polynômes de Lagrange et de Hermite

Soit $\epsilon \in]0,1[$ et f une fonction C^3 sur $[0,1]$. On note

$$a = f(0), \quad b = f(1) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in]0,1[} |f^{(3)}(x)|.$$

a) Déterminer le polynôme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points 0, ϵ et 1.

b) On note $E_1(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approxime $f(x)$ par $P_\epsilon(x)$. Donner une majoration de $|E_1(x)|$ en fonction de M et ϵ.

c) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour chaque x de l'intervalle $[0,1]$,

$$\lim_{\epsilon->0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$

d) Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré ≤ 2 vérifiant

$$P(0) = a, \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = b$$

Ce polynôme est appelé *polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f relativement aux points* 0,1 *et aux entiers* 1,0, ce qui signifie qu'on approche f à l'ordre 1 au point 0 et à l'ordre 0 au point 1.

e) On note $E_2(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approxime f par P. Donner une majoration de $|E_2(x)|$ en fonction de M.

(Indication : considérer la fonction φ définie par $\varphi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x^2(x-1)}t^2(t-1)$ pour $x \in]0,1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $\varphi^{(3)}(\xi) = 0$).

Exercice 2. Etude de l'erreur d'interpolation - Choix des points d'interpolation

Soit p_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f définie sur $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, relativement à $n+1$ points $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ de cet intervalle. Afin d'estimer l'erreur d'interpolation

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\,\pi_{n+1}(x)\,f^{(n+1)}(\xi_x), \qquad \pi_{n+1}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n),$$

nous nous proposons de calculer une majoration de $|\pi_{n+1}(x)|, x \in [a,b]$ pour différents choix de la répartition des points d'interpolation.

a) (points équidistants) Lorsque les points d'interpolation sont équidistants, on a

$$|\pi_{n+1}(x_0+sh)| = h^{n+1}\,\underbrace{|s(s-1)\cdots(s-n)|}_{\phi(s)}.$$

• Montrer que $\phi(s)$ atteint son maximum en un point $s_n \in]0,1/2[$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.

• Montrer que $\phi(s_n) \le \dfrac{C_1}{\ln n}\,n!$, où C_1 est une constante positive.

• En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n$, montrer qu'il existe $C_2 > 0$ tel que

$$|\pi_{n+1}(x)| \le \frac{C_2}{\sqrt{n}\,\ln n}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}.$$

b) (points de Tchebichev)

• Montrer que $t_n(u) = \cos(n \arccos u), u \in [-1,1]$ est un polynôme de degré n. Trouver la formule de récurrence qui permet de calculer $t_n(u)$.

• Trouver les racines $u_i \in [-1,1], i = 0,1,\ldots,n$ du polynôme t_{n+1} (points d'interpolation de Tchebichev d'ordre n).

• Montrer que les polynômes de base de Lagrange l_i associés aux points u_i sont donnés par

$$l_i(u) = (-1)^i\,\frac{t_{n+1}(u)}{(u-u_i)}\,\frac{\sqrt{1-u_i^2}}{(n+1)}.$$

Calculer l'erreur d'interpolation.

• Les points d'interpolation de Tchebichev d'ordre n de l'intervalle $[a,b]$, notés x_i, sont définis comme les images des points u_i par une bijection affine $u \to x$ qui envoie -1 en a et $+1$ en b. Montrer que les polynômes de base de Lagrange $\tilde{l}_i$ associés aux points x_i sont donnés par

$$\tilde{l}_i(x) = l_i(u)$$

où u est l'image réciproque de x par la bijection affine définie précédemment. Montrer enfin que

$$||\pi_{n+1}|| = \sup_{x\in[a,b]} |\pi_{n+1}(x)| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

Comparer avec l'expression obtenue pour les points d'interpolation équidistants.

Exercice 3. Polynômes de Tchebichev

a) Montrer que le polynôme d'interpolation d'une fonction paire f relativement aux zéros du polynôme de Tchebichev t_5 est pair.

b) Soit la fonction définie sur $[-1{,}1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. En posant $u = x^2$, montrer que le calcul du polynôme d'interpolation $P(x)$ de f relativement aux zéros de t_5 peut se ramener au calcul d'un polynôme d'interpolation $q(u)$ de degré plus petit.

c) A l'aide de la méthode des différences divisées, calculer $q(u)$ et en déduire $P(x)$ (on donnera le tableau des différences divisées et le résultat $P(x)$ sera ordonné en x).

Exercice 4. Polynômes orthogonaux (Tchebichev et Legendre)

Soit $]a,b[$ un intervalle, borné ou non, de $\mathbb{R}$. Par définition, un *poids* w est une fonction continue, positive $w :]a,b[\to]0,+\infty[$ avec la propriété suivante: l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |x|^n \, w(x)\, dx$ est convergente pour tout entier n.

L'espace vectoriel (E) des fonctions f continues sur $]a,b[$, telles que:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, w(x)\, dx} < +\infty,$$

sera muni du produit scalaire naturel:

$$< f,g >= \int_a^b f(x)g(x)\, w(x)\, dx.$$

a) Montrer que (E) contient l'espace vectoriel des fonctions polynômes.
Montrer qu'il existe une suite unique de polynômes unitaires (p_n), $\deg(p_n) = n$, orthogonaux pour un poids donné w.

b1) Montrer que les polynômes de Tchebichev $t_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1{,}1]$ sont deux à deux orthogonaux, relativement au poids $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b2) Même question pour les polynômes de Legendre $L_n(x) = \dfrac{1}{2^n \, n!} \dfrac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n\right]$, relativement au poids $w(x) = 1$ sur $[-1{,}1]$.

c) Soit (p_n) une suite de polynômes unitaires orthogonaux pour le poids w. Montrer que les polynômes p_n vérifient la relation de récurrence:

$$p_n(x) = (x - \lambda_n)\, p_{n-1}(x) - \mu_n \, p_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

avec

$$\lambda_n = \frac{< x p_{n-1}, p_{n-1} >}{\|p_{n-1}\|_2^2}, \qquad \mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|_2^2}{\|p_{n-2}\|_2^2}.$$

Retrouver, en particulier, les relations de récurrence pour le calcul des polynômes de Tchebichev et de Legendre:

$$t_{n+1}(x) = 2x\, t_n(x) - t_{n-1}(x)$$
$$nL_n(x) = (2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x).$$