TD n° 3 : Intégration numérique

Exercice 1. (extrait de l'examen partiel, mars 2000)

Soit $f \in C^1([0,1]$. On considère la formule de quadrature élémentaire :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \sim w_0 f(0) + w_1 f'(0) + w_2 f'(\xi)$$

où $\xi \in]0,1]$ et w_0, w_1, w_2 sont des réels. On pose

$$E(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - [w_0 f(0) + w_1 f'(0) + w_2 f'(\xi)]$$

a) Déterminer les paramètres ξ, w_0, w_1, w_2 pour que la formule de quadrature soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

b) Les paramètres ξ, w_0, w_1, w_2 étant ainsi fixés, calculer $E(x \to x^4)$ et en déduire l'ordre de la méthode. Déterminer le noyau de Peano K associé à la méthode.

c) En déduire une expression de l'erreur $E(f)$ lorsque $f \in C^4([0,1])$.

d) A l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle $[a,b]$ et donner la valeur de l'erreur.

Exercice 2. Interpolation/intégration numérique utilisant les polynômes de Hermite

a) Soit $\alpha_i, i = 1 \dots 4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in \mathcal{P}_3$ vérifiant les égalités :

$$p(0) = \alpha_1, \quad p'(0) = \alpha_2, \quad p(1) = \alpha_3, \quad p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$

b) Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathcal{P}_3, i = 1 \dots 4$ vérifiant les relations (1), avec respectivement :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1). \tag{2}$$

Montrer que le polynôme de la question **a)** s'écrit comme une combinaison linéaire de p_i :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, p_i(x). \tag{3}$$

c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit p_f le polynôme de la question **a)** avec :

$$\alpha_1 = f(0), \quad \alpha_2 = f'(0), \quad \alpha_3 = f(1), \quad \alpha_4 = f'(1). \tag{4}$$

Montrer que pour chaque point $x \in]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in]0,1[$ où on a l'égalité :

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = x^2(x-1)^2. \tag{5}$$

d) On approxime l'intégrale d'une fonction f à l'aide de la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx \sim \int_0^1 p_f(x)dx. \tag{6}$$

Montrer que cette formule est exacte pour les polynômes de $\mathcal{P}_3$. Calculer les poids $w_i = \int_0^1 p_i(x)dx$, $i = 1, \ldots, 4$ et en déduire une forme explicite de la formule de quadrature.

e) Montrer que la fonction $x \mapsto f^{(4)}(\xi_x)$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. En déduire qu'il existe un point $\eta \in]0,1[$ où l'erreur d'intégration $E(f) = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 p_f(x)dx$ s'écrit :

$$E(f) = \frac{1}{720} f^{(4)}(\eta). \tag{7}$$

f) Calculer le noyau de Peano de la méthode élémentaire. Retrouver le résultat démontré au point **e)**.

g) Soit maintenant $[a,b]$ un intervalle fermé, borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([a,b])$. En utilisant les résultats précédents, construire une formule de quadrature de la forme :

$$J(f) = \gamma_1 f(a) + \gamma_2 f'(a) + \gamma_3 f(b) + \gamma_4 f'(b), \tag{8}$$

qui soit exacte pour les polynômes de $\mathcal{P}_3$. Calculer l'erreur

$$E(f) = \int_a^b f(x)\, dx - J(f). \tag{9}$$

h) Soit une discrétisation de l'intervalle $[a,b]$ avec des points équidistants

$$x_i = a + ih, \quad h = (b-a)/n, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Construire une formule de quadrature composée qui utilise les valeurs de $f(x_i)$ et $f'(x_i)$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$. Estimer l'erreur de cette formule de quadrature.

Exercice 3. Calcul des coefficients de la formule de Newton-Cotes

Soit (NC_ℓ) la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes de rang ℓ (avec ℓ entier ≥ 1) :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \sim 2 \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j^{(\ell)}\, f(x_j),$$

où les points x_j sont équidistants, d'abscisses $x_j = -1 + 2\dfrac{j}{\ell}$, $\quad j = 0, 1, \ldots \ell$. On note $E_\ell(f)$ l'erreur d'approximation $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - 2 \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j^{(\ell)}\, f(x_j)$.

a) Montrer que :

$$\omega_j^{(\ell)} = \frac{(-1)^{(\ell-j)}\, C_\ell^j}{\ell \cdot \ell!} \int_0^{\ell} \frac{\pi_\ell(s)}{s-j}\,ds, \quad j = 0, 1, \ldots, \ell \qquad \text{avec} \quad \pi_\ell(s) = \prod_{j=0}^{\ell} (s-j).$$

b) Si le polynôme $\pi_\ell(s)$ est écrit sous la forme :

$$\pi_\ell(s) = \sum_{i=0}^{\ell+1} S_i^{(\ell+1)}\, s^i,$$

montrer que les coefficients $S_i^{(\ell+1)}$ (appelés les nombres de Stirling de 1ère espèce) vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0^{(1)} = 0 \\ S_1^{(1)} = 1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{l} S_0^{(\ell+1)} = 0 \\ S_i^{(\ell+1)} = S_{i-1}^{(\ell)} - \ell \cdot S_i^{(\ell)}, \quad i = 0, 1, \ldots \ell \\ S_{\ell+1}^{(\ell+1)} = 1 \end{array} \right.$$

c) Si

$$\frac{\pi_\ell(s)}{s-j} = \sum_{i=0}^{\ell} a_{j,i}^{(\ell)}\, s^i,$$

en déduire un algorithme de calcul des coefficients $S_j^{(\ell+1)}$ et $a_{j,i}^{(\ell)}$. Trouver les expressions des poids $\omega_j^{(\ell)}$ par cet algorithme.

d) Construire les formules de Newton-Cotes pour $\ell = 1, 2, 3$.

d) Calculer le noyau de Peano associé aux formules de Newton-Cotes pour $\ell = 1, 2$. Evaluer les erreurs d'interpolation.

Exercice 4. Intégration numérique aux points de Tchebichev.

Nous nous proposons d'établir quelques résultats sur la formule approchée :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \sim \int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx,$$

où $P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de degré n de f aux points de Tchebichev

$$x_i = \cos\theta_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\,\pi\right),\, i = 0, 1, \ldots n.$$

(a) Pour tout $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$a_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n\ \arccos x) - \cos(n\ \arccos y)}{x - y}\,dy.$$

Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i\, f(x_i), \quad \text{avec} \quad \omega_i = \frac{(-1)^i\ \sin\theta_i}{n+1}\, a_{n+1}(x_i).$$

(b) Calculer $a_{n+1}(x) + a_{n-1}(x)$; en déduire la valeur de

$$a_{n+1}(x) - 2x a_n(x) + a_{n-1}(x).$$

(c) En distinguant deux cas suivant la parité de n, montrer l'égalité :

$$\sin\theta\, a_n(\cos\theta) = 2\sin(n\theta) - 4 \sum_{1 \leq q \leq n/2} \frac{1}{4q^2 - 1}\, \sin(n - 2q)\theta.$$

(d) En déduire l'expression de ω_i :

$$\omega_i = \frac{1}{n+1}\left[2 - 4 \sum_{1 \leq q \leq (n+1)/2} \frac{1}{4q^2 - 1}\, \cos(2q\theta_i)\right]$$

Montrer que $\omega_i > 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.