TD n° 4 : Approximation numérique des solutions d'équations

Exercice 1
Soit f une fonction de classe C^2 sur un voisinage fermé I de la racine a de l'équation $f(x) = 0$. On cherche à approcher a par les valeurs successives $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, avec x_0 choisi dans I et $\varphi(x) = x - cf(x)$. La constante positive c sera déterminée pour que a soit un point attractif pour l'application φ.

1. Trouver la valeur optimale de c en fonction de $m_1 = \inf_{x \in I} f'(x)$ et $M_1 = \sup_{x \in I} f'(x)$ (on suppose $m_1 > 0$, $M_1 > 0$).
2. Trouver la méthode itérative permettant d'approcher numériquement $\sqrt{a}$, $a > 1$. Calculer $\sqrt{2}$ et comparer avec la méthode de Newton.
3. Trouver les points fixes des applications $\varphi(x) = x^2$ et $\varphi(x) = x^3$ et déterminer leur nature. Analyser la suite itérée (x_n) dans ce cas.
4. Soit φ une fonction de classe C^2. Montrer que, si x_0 est un point fixe pour φ et que l'on a $\varphi'(x_0) = 1$ et $\varphi''(x_0) > 0$, alors il existe un voisinage de x_0 dans lequel les points situés à gauche de x_0 sont attirés par x_0, alors que ceux situés à droite sont repoussés.

Exercice 2 (Méthodes de Newton et Steffensen)
Soit (x_n) la suite itérée associée à $f(x)$, supposée de classe C^2 sur l'intervalle fermé I, voisinage de la racine a de l'équation $f(x) = 0$. Si x_n converge vers a, on dit que l'ordre de convergence de la suite itérée est $p \in \mathbb{N}$, s'il existe une constante $C \neq 0$ telle que $\lim_{n \to \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = C$, où $\varepsilon_n = x_n - a$. On suppose ici que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer que l'ordre de convergence de la méthode de Newton
$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
est $p = 2$ (convergence quadratique).
2. Montrer que la méthode de Steffensen
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}, \quad g(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$$
a également pour ordre de convergence 2. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à celle de Newton ?

Exercice 3 (**Méthode d'Aitken – accélération de convergence**)
Pour calculer la racine α de l'équation $f(x) = 0$, on considère une méthode d'approximations successives

$$x_{n+1} = F(x_n), \qquad x_0 \neq \alpha \quad \text{donné}$$

que l'on suppose convergente avec

$$||F'||_\infty = \sup_{x \in I} |F'(x)| = k < 1$$

où I est un intervalle fermé contenant α.

1. On pose $e_n = x_n - \alpha$. Déterminer $L := \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n}$.
2. On considère les suites (ϵ_n) et $(\bar{x}_n)$ définies respectivement par

$$\epsilon_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} - L \quad \text{et} \qquad \bar{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}.$$

   Déterminer $\frac{\bar{x}_n - \alpha}{x_n - \alpha}$ en fonction de L, ϵ_n et ϵ_{n+1} et en déduire que les approximations d'Aitken $\bar{x}_n$ convergent plus vite que les approximations x_n, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{x}_n - \alpha}{x_n - \alpha} = 0.$$

3. **Application** : On considère la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et on souhaite trouver par approximations successives sa racine double 1.
   (a) Montrer que la méthode de Newton a une convergence linéaire mais pas quadratique et justifier pourquoi les théorèmes usuels ne s'appliquent pas.
   (b) On utilise maintenant la méthode d'Aitken définie à partir de la méthode de Newton. Déterminer $\frac{\bar{x}_{n+1} - \alpha}{\bar{x}_n - \alpha}$ en fonction de $\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha}$. Que gagne-t-on en vitesse de convergence ?

Exercice 4 (**Méthode de Newton pour la recherche de racines carrées de matrices**)
On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n admet une racine carrée s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $B^2 = A$.

1. Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.
2. Montrer que la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées.
3. Soit A une matrice inversible d'ordre n et soit F la fonction définie par $F(X) = X^2 - A$. Déterminer la différentielle de F en X.
4. Ecrire l'algorithme de Newton pour F.

Exercice 5
On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(-x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{4}, -\frac{1}{2}x + y^2 + \frac{3}{4})$.

1. Déterminer les points fixes de ϕ.
2. Ces points fixes sont-ils attractifs ?
3. Soit B le point non attractif de ϕ. Montrer que ϕ possède un inverse local en B. Le point B est-il attractif pour l'inverse ?