TD n°5 : Existence et unicité des solutions d'équations différentielles. Méthodes d'Euler et de Picard.

Exercice 1

On considère l'équation $x' = ax$, pour $a \neq 0$.

1. Résoudre l'équation et montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ pour $a < 0$.
2. Déterminer la solution approchée x_h obtenue par la méthode d'Euler sur l'intervalle $[0, T]$ pour un pas $h > 0$ constant. Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, $\lim_{h \rightarrow 0} x_h(t)$ est la solution trouvée ci-dessus.
3. Utiliser la méthode de Picard pour calculer les approchées de la solution et montrer qu'elles convergent vers la solution sur $[0, T]$.
4. Supposons $a < 0$. En utilisant la méthode d'Euler avec un pas h fixé, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_h(nh) = 0$ si et seulement si $h < \frac{-2}{a}$.

Exercice 2

1. Résoudre l'équation logistique $x' = ax - bx^2$, pour $a, b > 0$. Représenter les solutions et montrer que toute solution positive vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a/b$.
2. En utilisant la méthode d'Euler avec pas constant h , montrer que la solution approchée x_h est obtenue par itération de la fonction $g_h(x) = x + h(ax - bx^2)$. Calculer les points fixes de $g_h(x)$ et déterminer leur nature. Quel lien y a-t-il avec la solution exacte ?

Exercice 3

Résoudre explicitement l'équation $y' = -10(y - t^2) + 2t$ avec condition initiale $y(0) = 0$. Utiliser la méthode d'Euler pour donner la valeur de l'erreur en $t = 1$ en fonction du pas h .

Exercice 4

Les applications suivantes vérifient-elles une condition de Lipschitz globale ? locale ?

1. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$
3. $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
4. $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 - x_2^2}$, $x_1^2 \geq x_2^2$
5. $f(x) = x \ln x$, pour $0 < x \leq 1$, et $f(0) = 0$

Exercice 5

Montrer que $y(t) = -1$ est la seule solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = t(y + 1) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Exercice 6

Construire la suite des approximations successives (méthode de Picard) pour le problème

$$\begin{cases} y' = 2t(y + 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

et montrer qu'elle converge vers la solution $y(t) = e^{t^2} - 1$.

Exercice 7

Montrer que le problème de Cauchy $x' = \sqrt{|x|} + k$ avec condition initiale $x(0) = 0$ admet localement une solution unique lorsque $k > 0$ mais qu'il n'y a pas unicité lorsque $k = 0$.

Exercice 8

Montrer que le problème de Cauchy $y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$ avec $y(0) = 0$ admet au moins deux solutions maximales.