

TD n° 6 : Méthodes exactes de résolution de certaines équations différentielles ordinaires du premier ordre

Les encadrés ci-dessous décrivent différentes méthodes de résolution d'équations différentielles ordinaires. L'exercice consiste à appliquer ces méthodes aux exemples donnés dans la colonne de droite.

Equations à variables séparées

$$y' = f(y)g(t) \implies \frac{dy}{f(y)} = g(t)dt$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{f(y)}}_{G(y)} = \underbrace{\int g(t)dt}_{F(t)} \implies y = G^{-1}(F(t) + cte)$$

Equations associées à une intégrale première

$$y' = \frac{P(t, y)}{Q(t, y)} \implies P(t, y) dt - Q(t, y) dy = 0 \left(\stackrel{?}{=} dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right)$$

il existe une intégrale première V si $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$ et la solution est

alors donnée par $V = cte$, avec $\left[\frac{\partial V}{\partial t} = P(t, y), \frac{\partial V}{\partial y} = -Q(t, y) \right]$

Exemple

$$y' = -\frac{y}{2y + t}$$

Méthode du facteur intégrant

$$y' = \frac{P(t, y)}{Q(t, y)} \implies P(t, y) dt - Q(t, y) dy = 0 \quad (*)$$

Si $(*)$ n'est pas associée à une intégrale première, on la multiplie par une fonction appropriée $g(t, y)$ de sorte que la nouvelle équation

admette une intégrale première, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial y}[P(t, y)g(t, y)] = -\frac{\partial}{\partial t}[Q(t, y)g(t, y)]$$

Exemples

$$y' = \frac{y}{y^2 + t}$$

$$y'(ty - t^2) + y^2 - 3ty - 2t^2 = 0$$

Equation homogène

$y' = f(t, y) = \varphi\left(\frac{y}{t}\right)$ on utilise la substitution $\frac{y}{t} = z$
 et on obtient $y(t) = tz(t) \implies y'(t) = z(t) + tz'(t) = \varphi(z)$,
 qui est une équation à variables séparées $\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dt}{t}$

Observation : si $\varphi(z) = z$ l'équation initiale est à variables séparées.

Exemple

Trouver l'équation de la courbe plane $y(t)$ pour laquelle l'angle entre le vecteur de position et le vecteur tangent est le même en tout point de la courbe (spirale logarithmique).

Equation linéaire du premier ordre

$y' = a(t)y(t) + b(t)$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$

- on résout l'équation sans second membre : $z'(t) = a(t)z(t)$

$$z(t) = y_0 e^{\int_0^t a(s)ds}$$

- on cherche une sol particulière de l'EDO : $y_p'(t) = a(t)y_p(t) + b(t)$

par la méthode de variation de la constante : $y_p(t) = C(t)z(t)$

$$y_p' = C'(t)z(t) + C(t)z'(t) = C'(t)z(t) + C(t)a(t)z(t) = a(t)C(t)z(t) + b(t)$$

$$C'(t) = b(t)/z(t) = \frac{b(t)}{y_0} e^{-\int_0^t a(s)ds} \implies C(t) = \int_0^t \frac{b(\theta)}{y_0} e^{-\int_0^\theta a(s)ds} d\theta$$

$$y_p(t) = C(t)z(t) = e^{\int_0^t a(s)ds} \int_0^t b(\theta) e^{-\int_0^\theta a(s)ds} d\theta = \int_0^t b(\theta) e^{\int_\theta^t a(s)ds} d\theta$$

- la solution générale de l'EDO est : $y(t) = z(t) + y_p(t)$

$$y(t) = z(t) = y_0 e^{\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t b(\theta) e^{\int_\theta^t a(s)ds} d\theta$$

Exemple

$$ty' - y = t^2 \cos t$$

Equation de Bernoulli

$y' = p(t)y + q(t)y^\alpha$ on utilise la substitution $z(t) = y^{1-\alpha}$

et on obtient $z'(t) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)[p(t)y^{1-\alpha} + q(t)]$

qui est une équation linéaire $\frac{1}{1-\alpha}z'(t) = p(t)z(t) + q(t)$

Observation : si $\alpha = 1$ l'équation initiale est à variables séparées.

Exemple

$$y' - \frac{4y}{t} - t\sqrt{y} = 0$$

Equation de Ricatti

$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$ si on connaît une solution particulière $y_p(t)$

on cherche la solution générale sous la forme $y(t) = y_p(t) + z(t)$

avec $z(t)$ vérifiant une équation de Bernoulli

$$z'(t) = [2a(t)y_p(t) + b(t)]z(t) + a(t)z^2(t)$$

Exemple

$$(1-t^3)y' + t^2y + y^2 - 2t = 0$$