

Examen du 12 Juin 2003
(sans document ni calculatrice)

I

On considère le système différentiel, défini pour $t \geq 0$ par :

$$(P) \quad \begin{cases} u' + u^3 = v^2 + u \\ v' + v^3 = u^2 + v \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que (P) admet une solution locale quels que soient u_0 et v_0 .
- 2) Montrer que la fonction $U(u, v) = u^2 + v^2$ est une fonction de Liapounov pour (P) et en déduire que ce système admet une solution globale sur $[0, +\infty)$.

II

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in [0, T], \quad y(0) = y_0$$

où f est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ et lipschitzienne par rapport à x , uniformément en t .

Pour $h > 0$, on pose $t_n = nh$ et on définit une suite de valeurs y_n approchant $y(t_n)$, par la relation de récurrence

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h).$$

où la fonction Φ , dépendant de trois paramètres a , b et α est définie par :

$$\Phi(t, x, h) = af(t, x) + bf(t + \alpha h, x + \alpha hf(t, x))$$

- 1) Le schéma numérique y_n est-il stable ?
- 2) Donner une condition sur a , b et α pour que le schéma soit consistant.
- 3) Donner une condition sur a , b et α pour que le schéma soit d'ordre deux lorsque f est de classe C^2 .
- 4) Quels sont les schémas classiques que l'on peut retrouver à partir de cette définition pour des valeurs particulières des paramètres ?

III

Soit $[a, b]$ un intervalle fixé de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2 telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$.

1) Montrer qu'il existe un unique point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

2) Soit p_0 le polynôme de degré 1 tel que $p_0(a) = f(a)$ et $p_0(b) = f(b)$ et soit $x_1 \in]a, b[$ tel que $p_0(x_1) = 0$.

a) On considère une fonction $g = f - p_0$. Montrer que g ne s'annule pas dans $]a, b[$ et que $\forall x \in]a, b[$, $g(x) < 0$.

b) En déduire que $a < x_1 < c$.

3) En calculant la constante α pour que la fonction $g(x) - \alpha(x-a)(x-b)$ s'annule en $x = x_1$, montrer qu'il existe $M_2 > 0$ telle que :

$$|f(x_1)| \leq \frac{1}{2} M_2 |(x_1 - a)(x_1 - b)|$$

4) Plus généralement, on construit par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $c_0 = a$ et x_n étant construit, on définit x_{n+1} par $p_n(x_{n+1}) = 0$, p_n étant le polynôme de degré 1 tel que $p_n(x_n) = f(x_n)$ et $p_n(b) = f(b)$.

a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante dans l'intervalle $[a, c]$.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ et expliciter la fonction φ .

c) En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers c .

d) Démontrer qu'il existe $m_1 > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < c - x_n \leq \frac{-f(x_n)}{m_1}$$