Université P. et M. Curie
Licence de Mathématique B
Année 2003-2004

Sylvie Delabrière
Equations différentielles
Méthodes de résolution numérique

Corrigé de l'examen du 9 Juin 2004

I

1) On calcule les polynômes de base l_0, l_1, l_2
$l_0(u) = 4(u - \frac{1}{4})(u-1),\ l_1(t) = -\frac{16u(u-1)}{3},\ l_2(u) = \frac{4u(u-\frac{1}{4})}{3}$
D'où $p_2(u) = f(0)l_0(u) + f(\frac{1}{4})l_1(u) + f(1)l_2(u)$.
2)On définit une méthode élémentaire de quadrature sur $[0,1]$ par :

$$\int_0^1 f(u)\,du \sim \int_0^1 p_2(u)\,du = f(0)\int_0^1 l_0(u)\,du + f(\frac{1}{4})\int_0^1 l_1(u)\,du + f(1)\int_0^1 l_2(u)\,du$$
$$= -\frac{1}{6}f(0) + \frac{8}{9}f(\frac{1}{4}) + \frac{5}{18}f(1)$$

3) a) Par construction, cette méthode est d'ordre supérieur ou égal à 2. Or :

$$\int_0^1 u^3\,du = \frac{1}{4} \neq -\frac{1}{6}\times 0 + \frac{8}{9}(\frac{1}{4})^3 + \frac{5}{18} = \frac{7}{24}$$

Donc cette méthode est d'ordre 2.
b) Le noyau de Peano de cette méthode est donc

$$k_2(t) = \int_0^1 (u-t)_+^2\,du + \frac{1}{6}(-t)_+^2 - \frac{8}{9}(\frac{1}{4}-t)_+^2 - \frac{5}{18}(1-t)_+^2$$
$$= \frac{(1-t)^3}{3} - \frac{8}{9}(\frac{1}{4}-t)^2 - \frac{5}{18}(1-t)^2 \text{ si } 0 \le t \le \frac{1}{4}$$
$$= \frac{(1-t)^3}{3} - \frac{5}{18}(1-t)^2 \text{ si } \frac{1}{4} \le t \le 1$$

c) En étudiant les variations des fonctions concernées, il est facile de voir que ce noyau reste négatif sur $[0,1]$ et donc l'erreur de quadrature est donnée par :

$$|E(f)| \le \frac{1}{6}M_3\left|E(u \to u^3)\right| = \frac{1}{6}M_3(\frac{7}{24} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{144}M_3$$

où $M_3 = \sup_{u\in[0,1]}\left|f^{(3)}(u)\right|$
4) La méthode élémentaire sur un intervalle $[a, a+h]$ se déduit de la formule précédente par le changement de variable $x = a + hu$. On obtient :

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \sim h\big(-\frac{1}{6}f(a) + \frac{8}{9}f(a+\frac{h}{4}) + \frac{5}{18}f(a+h)\big)$$

avec l'erreur :

$$|E(f)| \leq \frac{h^4}{144} M_3$$

$M_3 = \sup_{x\in[a,a+h]} \left|f^{(3)}(x)\right|$

5) La méthode composée sur un intervalle quelconque $[a,b]$ associée à cette méthode élémentaire est donnée par $n \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, un découpage $a_i = a + ih, i = 0, 1, ..., n$ et la formule :

$$\int_a^b f(x)\, dx \sim h \sum_{i=0}^{n-1} \big(-\frac{1}{6} f(a_i) + \frac{8}{9} f(a_i + \frac{1}{4}h) + \frac{5}{18} f(a_{i+1})\big)$$

avec l'erreur :

$$|E(f)| \leq \frac{h^3}{144} M_3 (b-a)$$

$M_3 = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(3)}(x)\right|$

II

1) La fonction $F(t,x,h) = \dfrac{1}{3} f(t,x) + \dfrac{2}{3} f\big(t + \dfrac{3h}{4}, x + \dfrac{3h}{4} f(t,x)\big)$ vérifie évidemment l'hypothèse de consistance. Pour la stabilité, on écrit :

$$|F(t,x,h) - F(t,x^*,h)| \leq \frac{L}{3} |x - x^*| + \frac{2L}{3} \left| x - x^* + \frac{3h}{4}\big(f(t,x) - f(t,x^*)\big)\right|$$

$$\leq L |x - x^*| + \frac{L^2}{2} |x - x^*| = (L + \frac{L^2}{2}) |x - x^*|$$

Donc l'hypothèse de stabilité est vérifiée avec la constante $L_1 = L + \dfrac{L^2}{2}$.

2) Le schéma numérique explicite associé à $F(t,x,h)$ est défini par $h > 0$, $N = \dfrac{1}{h}$, y_0 et :

$$y_{n+1} = y_n + hF(nh, y_n, h), n = 1, 2...N$$

Il est d'ordre supérieur ou égal à 2 si et seulement si

$$\frac{\partial F}{\partial h}(t,x,0) = \frac{1}{2} f^{[1]}(t,x)$$

Or :

$$\frac{\partial F}{\partial h}(t,x,h) = \frac{2}{3}\big[\frac{3}{4}\frac{\partial f}{\partial t}\big(t + \frac{3}{4}h, x + \frac{3}{4}hf(t,x)\big) + \frac{3}{4}\frac{\partial f}{\partial x}\big(t + \frac{3}{4}h, x + \frac{3}{4}hf(t,x)\big) f(t,x)\big]$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial h}(t,x,0) = \frac{1}{2}\big[\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) f(t,x)\big] = \frac{1}{2} f^{[1]}(t,x)$$

3) En prenant $f(t,x)=f(x)$, on calcule :

$$\frac{\partial F}{\partial h}(t,x,h)=\frac{1}{2}\frac{df}{dx}\big(x+\frac{3}{4}hf(x)\big)f(x)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}(t,x,h)=\frac{3}{8}\frac{d^2 f}{dx^2}\big(x+\frac{3}{4}hf(x)\big)\big(f(x)\big)^2$$

D'où

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}(t,x,0)=\frac{3}{8}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)\big(f(x)\big)^2$$

Or :

$$f^{[1]}(x)=\frac{df}{dx}(x)f(x),\ \ f^{[2]}(x)=\big[\frac{d^2 f}{dx^2}(x)f(x)+\big(\frac{df}{dx}(x)\big)^2\big]f(x)\neq 3\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}(t,x,0)$$

Comme il n'y a pas égalité, le schéma n'est pas d'ordre supérieur ou égal à 3. Il est donc bien d'ordre 2.

III

1) $G(t,x,h)$ vérifie évidemment l'hypothèse de consistence. Pour la stabilité, un calcul facile montre que l'hypothèse de stabilité est vérifiée avec la constante :
$\frac{L}{6}+\frac{8L}{9}+\frac{8LL_1}{36}+\frac{5L}{18}+\frac{5LL_1}{18}=\frac{4L}{3}+\frac{LL_1}{2}$.

2) On applique la formule de quadrature de la question **I 4)** à la fonction $f\big(t,y(t)\big)$ sur l'intervalle $[t,t+h]$:

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f\big(u,y(u)\big)\,du=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} y'(u)\,du=\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

$$=-\frac{1}{6}f\big(t,y(t)\big))+\frac{8}{9}f(t+\frac{h}{4},y(t+\frac{h}{4}))+\frac{5}{18}f\big(t+h,y(t+h)\big)+O(h^3)$$

3) On applique la question **II 3)** avec h et avec $\frac{h}{4}$: comme le schéma est d'ordre 2, on sait que

$$\eta_F(t,y,h)=\frac{y(t)-y(t+h)}{h}-F\big(t,y(t),h\big)=O(h^2)$$

ce qui implique bien les estimations demandées.

4) On calcule η_G en introduisant un terme intermédiaire :

$$\eta_G(t,y,h)=\frac{y(t+h)-y(t)}{h}-G\big(t,y(t),h\big)$$

$$=\frac{y(t)-y(t+h)}{h}-[-\frac{1}{6}f\big(t,y(t)\big))+\frac{8}{9}f(t+\frac{h}{4},y(t+\frac{h}{4}))+\frac{5}{18}f\big(t+h,y(t+h)\big)]$$

$$+[-\frac{1}{6}f\big(t,y(t)\big))+\frac{8}{9}f(t+\frac{h}{4},y(t+\frac{h}{4}))+\frac{5}{18}f\big(t+h,y(t+h)\big)]$$

$$-[-\frac{1}{6}f\big(t,y(t)\big)+\frac{8}{9}f\big(t+\frac{h}{4},x+\frac{h}{4}F\big(t,y(t),\frac{h}{4}\big)\big)+\frac{5}{18}f\big(t+h,x+hF\big(t,y(t),h\big)\big)]$$

La première ligne est un $O(h^3)$ par la question **III 2)** et les deux suivantes fournissent aussi un $O(h^3)$ par la question **III 3)**. Le schéma est donc bien d'ordre 3.

IV

1) a) Le polynôme caractéristique de la matrice $A(t)$ est : $\det(A(t)-\lambda I) = -(\lambda-3t)^2(\lambda-\dfrac{3}{t})$.
Pour $t=1$, $A(t)$ possède une valeur propore triple $\lambda = 3$ et $A(1) = 3I$.

Pour $t \neq 1$, $A(t)$ admet $3t$ comme racine double, associée aux vecteurs propres $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{3}{t}$ comme racine simple, associée à $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
La matrice $A(t)$ est donc diagonalisable dans les 2 cas et

$$A(t) = P \begin{pmatrix} 3t & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{t} \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Comme $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ pour tous $s, t \in]0, +\infty[$, on a

$$R(t,t_0) = \exp \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds = P \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{3}{2}(t^2 - t_0^2)\right) & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{3}{2}(t^2 - t_0^2)\right) & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{t}{t_0})^3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

2) On dérive par rapport à t la formule : $R(t,t_0)R(t_0,t) = I$, ce qui donne

$$R'(t,t_0)R(t_0,t) + R(t,t_0)R'(t_0,t) = 0$$

soit

$$R'(t_0,t) = -R(t,t_0)^{-1}R'(t,t_0)R(t_0,t) = -R(t_0,t)R'(t,t_0)R(t_0,t)$$

Comme $R(t,t_0)$ est la résolvante de l'équation $y'(t) = A(t)y(t)$, on a $R'(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$.
D'où :

$$R'(t_0,t) = -R(t_0,t)A(t)R(t,t_0)R(t_0,t) = -R(t_0,t)A(t)$$

Finalement :

$$\left({}^tR(t_0,t)\right)' = {}^tR'(t_0,t) = -{}^t\big(R(t_0,t)A(t)\big) = -{}^tA(t)\,{}^tR(t_0,t)$$

De plus, $R(t_0,t_0) = I$. Donc la fonction $t \to {}^tR(t_0,t)$ vérifie l'équation caractéristique de la résolvante de l'équation différentielle $y'(t) = -{}^tA(t)y(t)$. C'est donc bien la résolvante de cette équation.

3) Le système à résoudre s'écrit $y'(t) = -{}^tA(t)y(t)$ et donc la solution s'écrit :

$$y(t) = {}^tR(t_0,t) \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ y_{03} \end{pmatrix}$$