

Examen du 14 Juin 2005
(sans document ni calculatrice)
(Les problèmes I et II sont indépendants)

I

Soit f une fonction de classe C^4 définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

- 1) Déterminer p_2 , le polynôme d'interpolation d'ordre 2 de f , qui prend les mêmes valeurs que f en $u = -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}$.
- 2) Déterminer la méthode de quadrature élémentaire M obtenue en remplaçant l'intégrale de f sur $[-1, +1]$ par celle de p_2 .
- 3) Montrer que l'ordre de cette méthode est égal à 3.
- 4) a) Montrer, en utilisant un résultat du cours, que $K(t)$ est une fonction paire sur $[-1, +1]$.
b) Calculer le noyau de Peano $K(t), t \in [-1, +1]$ de la méthode M
c) Montrer que $K(t)$ garde un signe constant sur $[-1, +1]$.
- 5) Donner l'expression de l'erreur élémentaire $E(f)$ de la méthode M sur l'intervalle $[-1, +1]$.
- 6) En déduire l'expression de la méthode M_h et de l'erreur élémentaire $E_h(f)$ sur un intervalle $[t_0, t_0 + h]$.

II

Soit f une fonction de classe C^4 définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, L -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle autonome sur $\mathbb{R}$: $y'(t) = f(y(t))$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

On étudie le schéma numérique explicite défini par la fonction F telle que, pour $x \in \mathbb{R}, h \in [0, T]$:

$$F(x, h) = \frac{1}{6}f(x) + \frac{2}{3}f\left(x + \frac{h}{2}f(x)\right) + \frac{1}{6}f\left(x + hf\left[x + \frac{h}{2}f(x)\right]\right)$$

- 1) Montrer que la fonction $F(t, x)$ est stable et consistante pour l'équation différentielle étudiée.
- 2) Montrer que les dérivées première et seconde en $h = 0$ des fonctions :

$$\mathcal{F}(h) = f\left(x + \frac{h}{2}f(x)\right)$$

$$\mathcal{G}(h) = f(x + hf(x + hf[x]))$$

sont :

$$\mathcal{F}'(0) = \frac{1}{2}f(x)f'(x), \mathcal{F}''(0) = \frac{1}{4}f^2(x)f''(x)$$

$$\mathcal{G}'(0) = f(x)f'(x), \mathcal{G}''(0) = f^2(x)f''(x) + 2f'^2(x)f(x)$$

3) En déduire un développement de Taylor de la fonction $h \rightarrow F(x, h)$ à l'ordre 3 en $h = 0$.

4) Montrer que le schéma numérique explicite défini par F est d'ordre supérieur ou égal à 3.

III

Soit f une fonction de classe C^4 définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, L -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle autonome sur $\mathbb{R}$: $y'(t) = f(y(t))$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

On étudie le schéma numérique explicite d'approximation, défini par la fonction F_1 :

$$F_1(x, h) = \frac{3}{8}f\left(x + \frac{h}{6}F(x, h)\right) + \frac{1}{4}f\left(x + \frac{h}{2}F(x, h)\right) + \frac{3}{8}f\left(x + \frac{5h}{6}F(x, h)\right)$$

où $F(x, h)$ est la fonction définie en **II**.

1) Montrer que F_1 est stable et consistante pour l'équation différentielle étudiée.

2) On cherche à montrer que le schéma numérique explicite défini par F_1 est d'ordre supérieur ou égal à 4 :

a) Montrer, en utilisant la partie **II**, que, si η_1 est l'erreur de consistance associée à F_1 ,

$$|\eta_1(y(t), h)| \leq \left| \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \frac{3}{8}f\left(y(t + \frac{h}{6})\right) - \frac{1}{4}f\left(y(t + \frac{h}{2})\right) - \frac{3}{8}f\left(y(t + \frac{5h}{6})\right) \right| + O(h^4)$$

b) En déduire, en utilisant la partie **I**, que

$$|\eta_1(t, y(t), h)| = O(h^4)$$

c) Conclure.