Université P. et M. Curie
Licence de Mathématique
Année 2004-2005

Sylvie Delabrière
Equations différentielles
Méthodes de résolution numérique
LM 383

Corrigé de l'examen du 14 Juin 2005

I

1) Les polynômes de bases sont
$l_0(u) = \frac{3}{8}u(3u-2), l_1(u) = -\frac{1}{4}(3u-2)(3u+2), l_2(u) = \frac{3}{8}u(3u+2)$, donc
$p_2(u) = f(-\frac{2}{3})\frac{3}{8}u(3u-2) - f(0)\frac{1}{4}(3u-2)(3u+2) + f(\frac{2}{3})\frac{3}{8}u(3u+2)$
2) M :

$$\int_{-1}^{1} f(u)\,du \sim f(-\frac{2}{3})\int_{-1}^{1}\frac{3}{8}u(3u-2)\,du - f(0)\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(3u-2)(3u+2)\,du + f(\frac{2}{3})\int_{-1}^{1}\frac{3}{8}u(3u+2)\,du$$

C'est à dire :

$$\int_{-1}^{1} f(u)\,du \sim \frac{3}{4}f(-\frac{2}{3}) + \frac{1}{2}f(0) + \frac{3}{4}f(\frac{2}{3})$$

3) La méthode est d'ordre supérieur ou égal à 2 par construction. Or :

$$\int_{-1}^{1} u^3\,du = 0 = \frac{3}{4}(-\frac{2}{3})^3 + 0 + \frac{3}{4}(-\frac{2}{3})^3$$

Donc la méthode est d'ordre supérieur ou égal à 3.

$$\int_{-1}^{1} u^4\,du = \frac{2}{5} \neq \frac{3}{4}\frac{16}{81} + 0 + \frac{3}{4}\frac{16}{81} = \frac{8}{27}$$

La méthode est donc d'ordre 3.
4) a) L'ordre de la méthode est impair et on a une symétrie des coefficients et des points autour de 0. On sait que dans ce cas, le noyau de Peano est une fonction paire.
b) $K(t) = \int_{-1}^{1}(u-t)_+^3\,du - [\frac{3}{4}(-\frac{2}{3}-t)_+^3 + \frac{1}{2}(-t)_+^3 + \frac{3}{4}(\frac{2}{3}-t)_+^3]$
$= \frac{(1+t)^4}{4}$ si $\frac{2}{3} \le t \le 1$
$= \frac{(1+t)^4}{4} - \frac{3}{4}(-\frac{2}{3}-t)^3$ si $0 \le t \le \frac{2}{3}$
$= \frac{(1+t)^4}{4} - \frac{3}{4}(-\frac{2}{3}-t)^3 - \frac{1}{2}(-t)^3$ si $-\frac{2}{3} \le t \le 0$

$$= \frac{(1+t)^4}{4} - \frac{3}{4}(-\frac{2}{3}-t)^3 - \frac{1}{2}(-t)^3 - \frac{3}{4}(\frac{2}{3}-t)^3 \text{ si } -1 \le t \le -\frac{2}{3}$$

c) Il suffit de montrer que $K(t)$ est positif sur $[-1,0]$. Or sur $[-1,-\frac{2}{3}]$, $K(t) = \frac{(1+t)^4}{4} \ge 0$ et sur $[-\frac{2}{3},0]$, on vérifie que $K(t) = t^4 + 3t^3 + \frac{1}{9} \ge 0$.

5) Comme $K(t)$ est positif sur $[-1,+1]$, on a :

$$E(f) = \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi) E(u \to u^4) = \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi)(\frac{2}{5} - \frac{8}{27}) = C f^{(4)}(\xi)$$

avec $C = \frac{1}{12}\frac{7}{5 \times 27}$

6) Sur un intervalle $[t_0, t_0+h]$, par le changement de variable $x = t_0 + \frac{h}{2} + u\frac{h}{2}$, on obtient la méthode :

$$\int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,dx \sim \frac{h}{2}[\frac{3}{4} f(t_0 + \frac{h}{6}) + \frac{1}{2} f(0) + \frac{3}{4} f(t_0 + \frac{5h}{6})]$$

$$E_h(f) = \frac{C}{2^5} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

II

1) La consistance de F est évidente. Elle est stable avec la constante :

$$\frac{L}{6} + \frac{2L}{3}(1 + \frac{T}{2}L) + \frac{L}{6}\left((1 + L(1+TL)\right)$$

2)

$$\mathcal{F}'(h) = \frac{1}{2} f(x) f'\left(x + \frac{h}{2} f(x)\right),\ \mathcal{F}''(h) = \frac{1}{4} f^2(x) f''\left(x + \frac{h}{2} f(x)\right),$$

d'où

$$\mathcal{F}'(0) = \frac{1}{2} f(x) f'(x),\ \mathcal{F}''(0) = \frac{1}{4} f^2(x) f''(x),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}'(h) &= f'\left(x + hf(x+hf(x))\right)\left[x + hf\left(x + hf(x)\right)\right]' \\ &= f'\left(x + hf(x+hf(x)\right)\left[f\left(x+hf(x)\right) + hf(x)f'\left(x+hf(x)\right)\right]\end{aligned}$$

et, par un calcul analogue,

$$\mathcal{G}''(h) = f''\left(x + hf(x+hf(x))\right)\left[f\left(x+hf(x)\right) + hf(x)f'\left(x+hf(x)\right)\right]^2$$

$$+f'\left(x+hf(x+hf(x))\right)\left[2f(x)f'\left(x+hf(x)\right)+hf^2(x)f''\left(x+hf(x)\right)\right]'',$$

d'où

$$\mathcal{G}'(0)=f(x)f'\left(x\right),\ \mathcal{G}''(0)=f^2(x)f''\left(x\right)+2f'^2(x)f(x).$$

3) On déduit de la question précédente la formule de Taylor

$$F(x,h)=f(x)+\frac{h}{2}f(x)f'(x)+\frac{h^2}{6}\left[f^2(x)f''(x)+f(x)f'^2(x)\right]+O(h^3).$$

4)

$$\begin{aligned}\eta\left(y(t),h\right)&=\frac{y(t+h)-y(t)}{h}-F\left(y(t),h\right)\\&=y'(t)+\frac{h}{2}y''(t)+\frac{h^2}{6}y'''(t)\end{aligned}$$

$$-\left(f(y(t))+\frac{h}{2}f(y(t))f'(y(t))+\frac{h^2}{6}\left[f^2(y(t))f''(y(t))+f(y(t))f'^2(y(t))\right]\right)+O(h^3)]$$

$$=f(y(t))+\frac{h}{2}f(y(t))f'(y(t))+\frac{h^2}{6}\left[f^2(y(t))f''(y(t))+f(y(t))f'^2(y(t))\right]$$

$$-\left(f(y(t))+\frac{h}{2}f(y(t))f'(y(t))+\frac{h^2}{6}\left[f^2(y(t))f''(y(t))+f(y(t))f'^2(y(t))\right]\right)+O(h^3)]=O(h^3)$$

5) L'erreur de consistance est un $O(h^3)$ donc le schéma est d'ordre 3.

III

1) La consistance est évidente. F_1 est stable avec la constante :

$$\frac{3}{4}L(1+\frac{T}{6}M)+\frac{1}{2}L(1+\frac{T}{2}M)+\frac{3}{4}L(1+\frac{5T}{6}M)$$

où M est la constante de stabilité de la fonction F.

2) a)

$$|\eta_1\left(y(t),h\right)|\leq$$

$$\left|\frac{y(t+h)-y(t)}{h}-\frac{3}{8}f\left(y(t+\frac{h}{6})\right)-\frac{1}{4}f\left(y(t+\frac{h}{2})\right)-\frac{3}{8}f\left(y(t+\frac{5h}{6})\right)\right|$$

$$+|\frac{3}{8}f\left(y(t+\frac{h}{6})\right)-\frac{1}{4}f\left(y(t+\frac{h}{2})\right)-\frac{3}{8}f\left(y(t+\frac{5h}{6})\right)$$

$$-\left(\frac{3}{8}f\left(x+\frac{h}{6}F(x,h)\right)+\frac{1}{4}f\left(x+\frac{h}{2}F(x,h)\right)+\frac{3}{8}f\left(x+\frac{5h}{6}F(x,h)\right)\right)|$$

La deuxième valeur absolue est inférieure à :

$$hL\left(\frac{3}{8}\eta\left(y(t),\frac{h}{6}\right)+\frac{1}{4}\eta\left(y(t),\frac{h}{2}\right)+\frac{3}{4}\eta\left(y(t),\frac{5h}{6}\right)\right)$$

D'après la partie **II**, cette expression est bien un $O(h^4)$

b) Comme

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h}=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f\left(y(x)\right)\,dx$$

on utilise la méthode de quadrature M de la partie **I** pour majorer la première valeur absolue. On sait que l'erreur de cette méthode sur l'intervalle $[t,t+h]$ est un $O(h^5)$. Donc, en divisant par h, on obtient bien aussi un $O(h^4)$.

c) Le schéma associé à F_1 est d'ordre supérieur ou égal à 4. C'est donc un meilleur schéma que celui qui est associé à F.