Université P. et M. Curie
Licence de Mathématique B
Année 2002-2003

Sylvie Delabrière
Equations différentielles
Méthodes de résolution numérique

Partiel du 4 Avril 2003
(sans document ni calculette)

I

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[3,5;3,7]$, dont on connait les valeurs suivantes :

$$f(3,5) = 33,11;\ f(3,55) = 34,81;\ f(3,6) = 36,59;\ f(3,65) = 38,47;\ f(3,7) = 40,44$$

1) Etablir le tableau des différences finies de f.

2) En déduire le polynôme de Newton de f d'ordre 4, associé aux points

$$x_0 = 3,50; x_1 = 3,55; x_2 = 3,60; x_3 = 3,65; x_4 = 3,70$$

3) Donner une valeur approchée de $f(3,575)$ et donner une majoration de l'erreur si f est de classe C^5.

II

On considère l'équation de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

Soit X_0 le vecteur de coordonnées $x_0 = y_0 = z_0 = 0,5$.
Déterminer les coordonnées du vecteur X_1, obtenu en appliquant une fois la méthode de Newton Raphson à cette équation, en partant de X_0.

III

On considère une méthode de quadrature élémentaire sur $[-1,+1]$, dite de Tchebichev :

$$\int_{-1}^{+1} f(u)\, du \sim a\big(f(u_0) + f(u_1) + f(u_2)\big)$$

1) Déterminer la constante a et le système d'équations (S) que doivent vérifier u_0, u_1, u_2 pour que cette méthode soit d'ordre supérieur ou égal à 3.

2) A partir du système (S), calculer les fonctions symétriques des solutions :

$$C_1 = u_0 + u_1 + u_2\ ,\ C_2 = u_0u_1 + u_1u_2 + u_2u_0\ ,\ C_3 = u_0u_1u_2$$

3) a) En déduire une équation du 3ème degré, ayant u_0, u_1, u_2 pour racines et calculer les valeurs de u_0, u_1, u_2.

b) Vérifier que la méthode est d'ordre 3.

4) Déterminer le noyau de Peano K de cette méthode.

5) Montrer que K garde un signe constant sur $[-1, +1]$.

6) En déduire l'erreur $E(f) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} f(u)\,du - a\big(f(u_0) + f(u_1) + f(u_2)\big)$ de cette méthode pour des fonctions f de classe C^4.

7) a) Décrire la méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle $[x_0, x_0 + h]$ associée à la méthode de Tchebichev.

b) Déterminer la méthode composée associée à cette méthode élémentaire et donner l'erreur pour des fonctions de classe C^4 sur un intervalle quelconque $[a, b]$.