

Partiel du 9 Avril 2004
(sans document ni calculatrice)

Approximation d'une fonction par un polynôme.

1) Montrer que pour tout quadruplet de réels a_1, a_2, a_3, a_4 , il existe un et un seul polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$(C) : p(0) = a_1, p(1) = a_2, p'(1) = a_3, p''(1) = a_4$$

2) a) Calculer les 4 polynômes $q_i, i = 1, 2, 3, 4$ satisfaisant la condition (C) avec les 4 quadruplets respectifs : $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$.

b) Montrer que le polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant la condition (C) avec

le quadruplet a_1, a_2, a_3, a_4 s'écrit : $p = \sum_{i=1}^4 a_i q_i$.

3) Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$. On pose :

$$a_1 = f(0), a_2 = f(1), a_3 = f'(1), a_4 = f''(1)$$

On note $p_f = \sum_{i=0}^4 a_i q_i$ et on cherche à évaluer l'erreur $\sup_{u \in [0, 1]} |f(u) - p_f(u)|$

a) Supposons que la fonction f est de classe C^4 sur $[0, 1]$ et soit $u \in]0, 1[$ fixé. On considère la fonction h , définie pour tout $t \in [0, 1]$ par $h(t) = f(t) - p_f(t) - ct(1-t)^3$ où c est tel que $h(u) = 0$.

Montrer que h'' a 3 zéros distincts sur $[0, 1]$ et en déduire qu'il existe $\xi_u \in [0, 1]$ tel que

$$c = -\frac{f^{(4)}(\xi_u)}{24}$$

b) En déduire que pour tout $u \in [0, 1]$, il existe $\xi_u \in]0, 1[$ tel que

$$f(u) - p_f(u) = -\frac{u(1-u)^3}{24} f^{(4)}(\xi_u)$$

c) Donner une évaluation de l'erreur $\sup_{u \in [0, 1]} |f(u) - p_f(u)|$.

4) Si f est une fonction de classe C^4 sur un intervalle quelconque $[a, b]$, montrer que la technique précédente appliquée sur les n sous intervalles d'une subdivision régulière de $[a, b]$ fournit une méthode d'approximation de f par un polynôme par morceaux π_f . Donner une évaluation de l'erreur $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \pi_f(x)|$ en fonction du pas $h = \frac{b-a}{n}$ du découpage.

Approximation d'une intégrale.

5) a) Montrer que la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(u) du \sim I(f)$$

où

$$I(f) = f(0) \int_0^1 q_1(u) du + f(1) \int_0^1 q_2(u) du + f'(1) \int_0^1 q_3(u) du + f''(1) \int_0^1 q_4(u) du$$

est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

b) Calculez les coefficients $\int_0^1 q_i(u) du$, pour $i = 1, 2, 3, 4$ et en déduire la formule de quadrature.

c) Montrer que cette méthode est d'ordre 3.

6)a) Soit $t \in [0, 1]$. Montrer que la fonction $\varphi(u) = (u - t)_+^3$, définie pour $u \in [0, 1]$ est de classe C^2 et calculer $\varphi'(u)$ et $\varphi''(u)$.

b) Montrer que l'erreur définie par : $E(f) = \int_0^1 f(u) du - I(f)$ est linéaire et en déduire en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral que

$$E(f) = \frac{1}{3!} \int_0^1 K(t) f^{(4)}(t) dt$$

où, pour $t \in [0, 1]$, $K(t) = E(u \rightarrow (u - t)_+^3)$.

c) Expliciter $K(t)$ et montrer que $K(t)$ garde un signe constant sur $[0, 1]$.

7) En déduire que pour une fonction f de classe C^4 sur $[0, 1]$, il existe un point $\xi \in]0, 1[$ tel que

$$E(f) = -\frac{1}{480} f^{(4)}(\xi)$$

8) Soit f une fonction de classe C^4 sur un intervalle arbitraire $[a, a + h]$. A partir des questions précédentes, établir la formule de quadrature d'ordre 3 sur $[a, a + h]$:

$$\int_a^{a+h} f(x) dx \sim J(f) = \frac{h}{4} f(a) + \frac{3h}{4} f(a+h) - \frac{h^2}{4} f'(a+h) + \frac{h^3}{24} f''(a+h)$$

9) Calculer l'erreur :

$$\int_a^{a+h} f(x) dx - J(f)$$

10) Expliciter la méthode composée associée à cette méthode élémentaire On notera $\Pi(f)$ la valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$. Pour une fonction f de classe C^4 sur un intervalle quelconque $[a, b]$, donner une évaluation de l'erreur

$$\int_a^b f(x) dx - \Pi(f)$$

11) Montrer que

$$\Pi(f) = \int_a^b \pi_f(x) dx$$

où π_f a été défini en **4)** et en déduire, en utilisant la question **4)c)** une autre majoration de l'erreur

$$\int_a^b f(x) dx - \Pi(f)$$

Comparer avec la majoration obtenue à la question **10)**.