Université P. et M. Curie — Sylvie Delabrière
Licence de Mathématique B
Equations Différentielles et méthodes de résolution numérique
Année 2002-2003

Examen du 4 Septembre 2003
(sans document ni calculette)

I

On étudie le schéma de Runge Kutta défini par le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc|ccc}
(M_2) & \frac{2}{3} & & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\
(M_3) & \frac{2}{3} & & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
(M) & 1 & & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}
\end{array}$$

1) Décrire les méthodes d'intégration $(M_2), (M_3), (M)$.

2) Donner l'algorithme définissant le schéma.

3) Mettre le schéma sous la forme $y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n, h)$ en explicitant la fonction $F(t, x, h)$ pour $t, x, h \in \mathbb{R}^3$.

II

Soit l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$(E) \quad y''(t) + y(t) = f(t) \ , \ y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y'_0$$

où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et y_0, y'_0 sont deux réels donnés.

1) Mettre (E) sous forme d'une équation différentielle (S) du premier ordre à valeur dans $\mathbb{R}^2$.

2) Ecrire la résolvante de l'équation linéaire homogène associée à (S).

3) En déduire la solution générale de (E).

4) Montrer que toute solution y de (E) vérifie : $y(\pi) + y(0) = \displaystyle\int_0^\pi f(t) \sin t \, dt$.

III

1) Montrer que la formule de quadrature

$$\int_0^1 z(t)\, dt \sim I(z) = \frac{1}{4}\big(z(0) + 3z(\frac{2}{3})\big)$$

est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Calculer le noyau de Peano et en déduire que l'erreur vérifie :

$$E(z) = \int_0^1 z(t)\, dt - I(z) = \frac{1}{216} z'''(\xi) \ , \ \xi \in]0, 1[$$

pour toute fonction $z \in C^4([0,1])$.

2) En utilisant la question 1), trouver l'erreur de la formule :

$$\int_t^{t+h} z(s)\,ds \sim \frac{h}{4}\big(z(t) + 3z(t+\frac{2h}{3})\big)$$

3) On veut résoudre l'équation différentielle

$$y' = f(t,y)$$

où $f(t,x)$ est une fonction définie sur $[0,T]\times\mathbb{R}$, Lipschitzienne par rapport à x uniformément en t. En appliquant la question 2) à la fonction y', montrer que toute solution $y \in C^4([0,T])$ vérifie pour tout $t_0 \in [0,T]$ et $h > 0$ tel que $t_0 + h \in [0,T]$:

$$\frac{1}{h}\big(y(t_0+h) - y(t_0)\big) = \frac{1}{4}f\big(t_0, y(t_0)\big) + \frac{3}{4}f\big(t_0 + \frac{2h}{3}, y(t_0 + \frac{2h}{3})\big) + O(h^4)$$

4) On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$ et $h > 0$ tels que $t + \frac{h}{2} \in [0,T]$,

$$F_1(t,x,h) = f\big(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t,x)\big)$$

et on considère le schéma explicite à un pas défini par :

$$y_{n+1} = y_n + hF_1(nh, y_n, h)$$

Montrer que ce schéma est d'ordre 2.

5) On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$ et $h > 0$ tels que $t + \frac{2h}{3} \in [0,T]$,

$$F(t,x,h) = \frac{1}{4}f(t,x) + \frac{3}{4}f\big(t + \frac{2h}{3}, x + \frac{2h}{3}F_1(t,x,\frac{2h}{3})\big)$$

Déduire des questions 3) et 4) que le schéma numérique à un pas défini par F ;

$$y_{n+1} = y_n + hF(nh, y_n, h)$$

est d'ordre 3.

6) En supposant que la solution y est de classe C^4, trouver une majoration de l'erreur $e_n = |y_n - y(nh)|$ du schéma défini par F.