Université P. et M. Curie
Licence de Mathématique B
Année 2003-2004

Sylvie Delabrière
Equations différentielles
Méthodes de résolution numérique

Examen du 9 Septembre 2004
(sans document ni calculette)

I

On cherche à résoudre l'équation

$$x^3 + 2x + 1 = 0$$

1) Montrer que la fonction $f(x) = x^3 + 2x + 1$ a une seule racine réelle a.

2) Montrer que $-\frac{1}{2} \leq a \leq -\frac{2}{5}$.

3) Donner l'expression de la fonction φ, associée à f par la méthode de Newton.

4) Montrer que la suite récurrente définie par $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a quel que soit $x_0 \in [-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}]$.

5) Donnez sa vitesse de convergence.

II

On cherche à résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^2$:

$$y'(t) = f\big(y(t)\big)$$

où, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 4x_1^3 - 2x_1x_2^2 \\ x_2 - 4x_2^3 - 2x_1^2x_2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que cette équation différentielle admet une unique solution locale pour toute condition initiale $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2$.

2) Montrer que la fonction $U(x) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2x_2^2$ est une fonction de Liapounov pour cette équation différentielle et en déduire l'existence d'une solution globale pour toute condition initiale.

3) Cette équation différentielle est-elle de type gradient, associée à la fonction U ?

III

On considère une méthode de quadrature (M) sur $[0,1]$ telle que :

$$\int_0^1 f(u)\, du \sim af(0) + bf(\frac{1}{3}) + cf(\frac{1}{2})$$

1) Déterminer les coefficients a, b, c pour que cette méthode soit d'ordre 2.

2) Soit $\alpha \in [0,1]$. On considère la méthode de Runge-Kutta, définie par le tableau :

$$\begin{array}{lc|ccc} (M_2) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ (M_3) & \frac{1}{2} & \alpha & 1-\alpha & \\ (M) & 1 & a & b & c \end{array}$$

a) Décrire les méthodes de quadrature (M_2) et (M_3) et donner leur ordre (dépendant de α).

b) Ecrire l'algorithme définissant la méthode de Runge Kutta définie par ce tableau.

c) Trouver des conditions sur a, b, c, α pour que l'ordre de cette méthode soit ≥ 3.

IV

On considère un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et $(n+1)$ points équidistants de $[a, b]$, d'abscisses $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, n$, où $h = (b-a)/n > 0$.

On se propose d'étudier un schéma de différences finies implicite :

$$(S) \quad f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i + \alpha f_{i+1}^{''} + \beta f_i'' + \gamma f_{i-1}^{''} = 0$$

pour calculer les valeurs $(f_i^{''})_{i=0,1,\ldots n}$ en fonction des valeurs $(f_i)_{i=0,1,\ldots n}$ supposées connues.

On dira qu'un tel schéma est d'ordre p si lorsque f est une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $[a, b]$ et pour $i = 0, 1, \ldots n$, $f_i = f(x_i), f_i'' = f''(x_i)$, alors

$$f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i + \alpha f_{i+1}^{''} + \beta f_i'' + \gamma f_{i-1}^{''} = O(h^p)$$

1) A l'aide de développements de Taylor, déterminer les coefficients α, β, γ pour que le schéma implicite (S) défini ci dessus soit d'ordre au moins 3.

2) Pour ces valeurs de α, β, γ, quel est l'ordre exact de ce schéma ?