

Corrigé de l'Examen du 9 Septembre 2004

I

1) La fonction $f(x) = x^3 + 2x + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $f'(x) = 3x^2 + 2$ est strictement positive. Comme f est continue, qu'elle tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ et vers $-\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$, elle admet une et une seule racine réelle.

2) $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} \leq 0$ et $f(-\frac{2}{5}) = \frac{17}{125} \geq 0$ donc $-\frac{1}{2} \leq a \leq -\frac{2}{5}$.

3) Comme $f'(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 + 2}$.

4) La suite récurrente $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a lorsque x_0 est choisi dans un intervalle où $|\varphi'(x)| < 1$. Or $|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| = \left| \frac{6x(x^3 + 2x + 1)}{(3x^2 + 2)^2} \right| \leq \frac{3 \cdot \frac{17}{125}}{4} = \frac{51}{600} < 1$, pour $x \in [-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}]$.

5) Le point a est un point super-attractif pour φ et on a $|x_p - a| \leq \frac{1}{2M}(2M|x_0 - a|)^{2^p}$, où

$$M = \max_{x \in [-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}]} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right| \leq \frac{3}{2}.$$

II

1) La fonction f est de classe C^∞ donc elle est localement lipschitzienne par rapport à x et elle ne dépend pas de t . Donc par le théorème de Cauchy Lipschitz, cette équation différentielle admet une unique solution locale pour toute condition initiale $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2$.

2) La fonction $U(x) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2$ vérifie les conditions 1 et 2 du théorème de Liapounov. Vérifions la condition 3 :

$$\begin{aligned} DU(x)f(x) &= \begin{pmatrix} 4x_1^3 + 2x_1x_2^2 & 4x_2^3 + 2x_2x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 4x_1^3 - 2x_1x_2^2 \\ x_2 - 4x_2^3 - 2x_2x_1^2 \end{pmatrix} \\ &= 4x_1^4 - 16x_1^6 - 8x_1^4x_2^2 + 2x_1^2x_2^2 - 8x_1^4x_2^2 - 4x_1^2x_2^4 + 4x_2^4 - 16x_2^6 - 8x_2^4x_1^2 + 2x_2^2x_1^2 - 8x_2^4x_1^2 - 4x_2^2x_1^4 \\ &\leq 4x_1^4 + 4x_2^4 + 4x_1^2x_2^2 = 4U(x) \end{aligned}$$

La fonction U est bien une fonction de Liapounov pour l'équation différentielle considérée et on en déduit l'existence d'une solution globale sur tout intervalle $[0, T]$ donc sur $[0, +\infty[$, pour toute condition initiale.

3) Cette équation différentielle n'est pas de type gradient associée à la fonction U car $f(x) \neq -\nabla U(x)$.

III

1) Pour que cette méthode soit d'ordre 2, il faut qu'elle soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Ceci donne 3 conditions :

$$\begin{aligned}\int_0^1 du &= 1 = a + b + c \\ \int_0^1 u du &= \frac{1}{2} = \frac{b}{3} + \frac{c}{2} \\ \int_0^1 u^2 du &= \frac{1}{3} = \frac{b}{9} + \frac{c}{4}\end{aligned}$$

La solution de ce système est $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}, c = 2$.

2) a) (M_2) : $\int_0^{\frac{1}{3}} f(u) du \sim \frac{1}{3} f(0)$. C'est la méthode des rectangles qui est d'ordre 0.

(M_3) : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(u) du \sim \alpha f(0) + (1 - \alpha) f(\frac{1}{3})$.

$\int_0^{\frac{1}{2}} u du = \frac{1}{8} \sim (1 - \alpha) \frac{1}{3}$. Pour que la méthode soit d'ordre 1, il faut que $\alpha = \frac{5}{8}$.

$\int_0^{\frac{1}{2}} u^2 du = \frac{1}{24} \sim \frac{3}{8} \frac{1}{9} = \frac{1}{24}$. Donc pour $\alpha = \frac{5}{8}$, la méthode est d'ordre au moins 2.

$\int_0^{\frac{1}{2}} u^3 du = \frac{1}{64} \sim \frac{3}{8} \frac{1}{27} = \frac{1}{72}$. La méthode n'est donc pas d'ordre 3 pour $\alpha = \frac{5}{8}$, elle est donc d'ordre exactement 2 dans ce cas et d'ordre 0 si $\alpha \neq \frac{5}{8}$.

b) L'algorithme définissant la méthode de Runge Kutta définie par ce tableau s'écrit :

$$\begin{aligned}t_{n,1} &= t_n, y_{n,1} = y_n, p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n,2} &= t_n + \frac{1}{3}h_n, y_{n,2} = y_n + \frac{1}{3}h_n p_{n,1}, p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ t_{n,3} &= t_n + \frac{1}{2}h_n, y_{n,3} = y_n + h_n[\alpha p_{n,1} + (1 - \alpha)p_{n,2}], p_{n,3} = f(t_{n,3}, y_{n,3}) \\ t_{n+1} &= t_n + h_n, y_{n+1} = y_n + h_n[ap_{n,1} + bp_{n,2} + cp_{n,3}], p_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})\end{aligned}$$

c) Pour utiliser les résultats du cours, on reprend les notations du cours :

$$q = 3, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = \frac{1}{2}, a_{2,1} = \frac{1}{3}, a_{3,1} = \alpha, a_{3,2} = 1 - \alpha, b_1 = a, b_2 = b, b_3 = c$$

L'ordre de cette méthode est ≥ 2 ssi $\sum_{i=1}^3 b_i c_i = \frac{1}{2}$. Or, $\sum_{i=1}^3 b_i c_i = \frac{b}{3} + \frac{c}{2}$. Donc la méthode est d'ordre ≥ 2 ssi $2b + 3c = 3$.

L'ordre de cette méthode est ≥ 3 ssi de plus, $\sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$ et $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{i-1} b_i a_{i,j} c_j^2 = \frac{1}{6}$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 &= \frac{b}{9} + \frac{c}{4} \text{ et } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{i-1} b_i a_{i,j} c_j^2 = \frac{c}{9}(1 - \alpha). \text{ Donc la méthode est d'ordre } \geq 3 \text{ ssi} \\ 4b + 9c &= 12 \text{ et } c(1 - \alpha) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

La méthode est d'ordre supérieur ou égal à 3 ssi $b = -\frac{2}{3}, c = 2, \alpha = \frac{1}{4}$ et donc aussi $a = \frac{1}{2}$.

IV

1) En utilisant les développements de Taylor suivants :

$$f_{i\pm 1} = f_i \pm h f'_i + \frac{h^2}{2} f''_i \pm \frac{h^3}{6} f'''_i + \frac{h^4}{24} f^{(4)}_i \pm \frac{h^5}{120} f^{(5)}_i + \frac{h^6}{720} f^{(6)}_i + O(h^7)$$

$$f''_{i\pm 1} = f''_i \pm h f'''_i + \frac{h^2}{2} f^{(4)}_i \pm \frac{h^3}{6} f^{(5)}_i + \frac{h^4}{24} f^{(6)}_i + O(h^5)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i + \alpha f''_{i+1} + \beta f''_i + \gamma f''_{i-1} = \\ f''_i [h^2 + \alpha + \beta + \gamma] + h f'''_i [\alpha - \gamma] + f^{(4)}_i [(h^4/12) + (h^2/2)(\alpha + \gamma)] + f^{(5)}_i [(h^3/6)(\alpha - \gamma)] \\ + f^{(6)}_i [(h^6/360) + (h^4/24)(\alpha + \gamma)] + O(h^5) \end{aligned}$$

Pour que le schéma soit d'ordre au moins 3, il faut annuler les termes devant les dérivées successives $f''_i, f'''_i, f^{(4)}_i$. Nous obtenons le système linéaire suivant de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} h^2 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ (h^4/12) + (h^2/2)(\alpha + \gamma) = 0 \end{cases}$$

qui a une solution unique : $\alpha = \gamma = -h^2/12, \beta = -5h^2/6$.

2) Pour ces valeurs de α, β, γ , on voit que le terme en h^3 disparaît, mais pas celui en h^4 . Ce schéma est donc d'ordre 4.