Université de Versailles
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA350.html

Année 2013-2014
semestre 1

Maths/Ordi, TP 6: algèbre linéaire avec Maxima

Ce TP relatif à l'utilisation de *Maxima* en algèbre linéaire est divisé en deux parties: il comprend tout d'abord une présentation des commandes utiles dans ce domaine (matrices, vecteurs, réduction) puis quelques exercices d'application pouvant être résolus avec *Maxima*.

1 Commandes utiles de Maxima en algèbre linéaire

1.1 Opérations usuelles

Définition d'une matrice

```
(%i1)  A:matrix([1,2],[4,5]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

```
(%i2)  B:matrix([3,-1],[9,4]);
```

(%o2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

```
(%i3)  B[1,2];
```

(%o3) -1

Remarque : un vecteur n'est rien d'autre qu'une matrice à une colonne (ou à une seule ligne)

```
(%i4)  V:matrix([1,2,3]);
```

(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

```
(%i5)  U:matrix([1,3,4]);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

```
(%i6) U[1,3];
```

(%o24) 4

Opérations sur les matrices

```
(%i7) A+B;
```

(%o7) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$

```
(%i8) A-B;
```

(%o8) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i9) A.B;
```

(%o9) $\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 57 & 16 \end{pmatrix}$

```
(%i10) 3*A;
```

(%o10) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$

Puissance d'une matrice

```
(%i11) A^^3;
```

(%o11) $\begin{pmatrix} 57 & 78 \\ 156 & 213 \end{pmatrix}$

Inverse d'une matrice : deux commandes possibles

```
(%i12) A^^(-1);
```

(%o12) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

```
(%i13) invert(A);
```

(%o13) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Transposée

```
(%i14) transpose(A);
```

(%o14) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Rang d'une matrice

```
(%i15) rank(A);
```

(%o15) 2

Exercice 1. Soient u=(a,2+a,3), v=(a,1-2a,4-a),w=(3a, 4-3a,11-2a). La famille est-elle libre ? Déterminant

```
(%i16) determinant(A);
```

(%o16) -3

Produit scalaire

```
(%i17) innerproduct(U,V);
```

(%o26) 19

1.2 vecteurs

Pour les vecteurs, *Maxima* utilise les crochets.

```
(%i18) u:[1,2];
```

(%o1) $[1,2]$

Attention : la sortie semble être un vecteur ligne. Mais par convention, si on multiplie une matrice suivie d'un vecteur Au, alors u sera considéré comme un vecteur colonne mais si on calcule uA alors u sera considéré comme un vecteur ligne. Il n'y a pas d'ambiguité mais il est vrai que cela peut porter à confusion. Voici des exemples à tester (posez les calculs sur une feuille pour comprendre ce qui se passe) :

```
(%i19) A:matrix([1,2,3],[3,4,5]);
```

(%o2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

```
(%i20) v:[x,y,z];
```

(%o3) $[x,y,z]$

```
(%i21) A.v;
```

(%o4) $\begin{pmatrix} 3\,z+2\,y+x \\ 5\,z+4\,y+3\,x \end{pmatrix}$

```
(%i22) v.A;
```

$MULTIPLYMATRICES : attempttomultiplynonconformablematrices.-$
$-anerror.Todebugthistry : debugmode(true);$

```
(%i23) A.u;
```

$MULTIPLYMATRICES : attempttomultiplynonconformablematrices.-$
$-anerror.Todebugthistry : debugmode(true);$

```
(%i24) u.A;
```

(%o10) $\begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$

1.3 Réduction

```
(%i25) C:1/2*matrix([3,-2,-3],[-5,0,3],[14,-4,-10]);
```

(%o18) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

```
(%i26) M:matrix([1,-2,0],[-2,1,0],[-4,-4,3]);
```

(%o19) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Valeurs propres (entre les premiers crochets se trouvent les valeurs propres, entre les suivants, leur multiplicité)

```
(%i27) eigenvalues(C);
```

(%o20) $[[-2,-1,-\frac{1}{2}],[1,1,1]]$

```
(%i28) eigenvalues(M);
```

(%o21) $[[3,-1],[2,1]]$

Cela signifie que 3 est de multiplicité 2 et -1 de multiplicité 1 Vecteurs propres

```
(%i29) eigenvectors(C);
```

(%o22) $[[[-2,-1,-\frac{1}{2}],[1,1,1]],[[[1,-1,3]],[[1,-\frac{1}{2},2]],[[1,-1,2]]]]$

```
(%i30) eigenvectors(M);
```

(%o23) $[[[3,-1],[2,1]],[[[1,-1,0],[0,0,1]],[[1,1,2]]]]$

Maxima donne d'abord les valeurs propres, puis les multiplicités et enfin les vecteurs propres dans le même ordre

2. Applications.

Vous effectuerez les calculs "à la main" demandés sur une feuille séparée. Pensez par ailleurs à structurer votre feuille de calcul *Maxima* (avec numéro des exercices, des questions...).

Sauf indication contraire, on utilisera au maximum *Maxima* pour effectuer les calculs. Il pourra aussi être utilisé pour vérifier des calculs effectués à la main.

Exercice 1. Résolution de sytèmes linéaires.

1. Résoudre avec *Maxima* le système linéaire $Ax = b$ dépendant d'un paramètre réel m, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre ensuite ce système sur une feuille. Que constatez-vous ?

Exercice 2. Changement de bases.
On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

1. Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$ trois vecteurs de E.

   (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de E, notée $\mathcal{B}'$.

(b) Déterminer $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_c$ vers $\mathcal{B}'$ et entrez cette matrice sur *Maxima* sous le nom P. Soit x le vecteur de E tel que les composantes de x dans $\mathcal{B}'$ soient $X_{\mathcal{B}'} = (2,3,4)^T$. Exprimer x dans la base canonique.

(c) Calculer $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_c}$.

(d) Soit $y = (1,2,3)$ un vecteur de E.

i. Calculer les composantes de y dans la base $\mathcal{B}'$ à l'aide de la question précédente.

ii. Résoudre $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'}Y = (1,2,3)^t$. Que représente Y ?Expliquer.

2. Mêmes questions en changeant uniquement les vecteurs u_1, u_2, u_3 :

$u_1 = (1,-1,-1)$, $u_2 = (1,2,1)$ et $u_3 = (0,1,1)$.

Exercice 3. Matrices d'une application linéaire.
Soit $f : (x,y) \mapsto (x+y, 2x-3y, 3x-y, y)$ une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B}_c^2$ et $\mathcal{B}_c^4$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement et $\mathcal{D}^2 = (u_1, u_2)$ où $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (0,2)$, $\mathcal{D}^4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ où $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,1)$, et $v_4 = (1,1,1,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{D}^2$ et $\mathcal{D}^4$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement.

2. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ (à l'aide de *Maxima*).

3. Déterminer et rentrer sous *Maxima* la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement.

4. Déterminer $P_{\mathcal{B}_c^2,\mathcal{D}^2}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_c^2$ vers $\mathcal{D}^2$ et $P_{\mathcal{B}_c^4,\mathcal{D}^4}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_c^4$ vers $\mathcal{D}^4$.

5. En déduire la matrice de f dans les bases $\mathcal{D}^2$ et $\mathcal{D}^4$ respectivement.

Exercice 4 Application linéaire définie par une matrice.
On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère $u_1 = e_2 + e_3$, $u_2 = e_3 + e_1$, $u_3 = e_1 + e_2$ et $u_4 = -3e_1 + 5e_2 + e_4$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit f l'endomorphisme défini par la donnée de sa matrice A le représentant dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.
   (a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, expliciter $f(x, y, z, t)$.
   (c) Calculer le noyau de f et sa dimension.
   (d) Calculer l'image de f et sa dimension.
   (e) Vérifier le théorème du rang.

Exercice 5. Réduction d'une matrice, applications.
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'application linéaire définie par $f(e_1) = -4e_1 + 6e_2 - 3e_3$, $f(e_2) = 4e_1 - 3e_2 + 2e_3$ et $f(e_3) = 14e_1 - 16e_2 + 9e_3$. On notera id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et Id la matrice identité de taille 3.

1. Diagonalisation.
   (a) Donner la matrice A de f dans la base canonique.
   (b) Calculer le polynôme caractéristique de A.
      i. Montrer que ses racines sont égales à $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.
      ii. Pour chaque i, donner la dimension puis un vecteur non nul u_i de $Ker(f - \lambda_i Id)$
      iii. Vérifier que (u_1, u_2, u_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
      iv. Taper la commande `eigenvalues(A);` et `eigenvectors(A);` Interpréter les résultats donnés.
   (c) Ecrire la matrice C de f dans la base (u_1, u_2, u_3) sans aucun calcul.
   (d) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base (u_1, u_2, u_3) et en déduire son inverse.
   (e) Ecrire une relation simple entre A, P, C. On dit qu'on a diagonalisé (ou réduit) A.
2. Applications.
   (a) Essayer de calculer avec *Maxima* A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le résultat est-il exploitable ?

(b)

i. Montrer (sans *Maxima*) que $A^n = PC^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. Calculer A^n avec cette relation (sur papier puis avec *Maxima*).

iii. Vérifier votre formule en calculant A^6 de deux façons différentes.