

Maths/Ordi, TP 7: analyse avec Maxima

Vous effectuerez les calculs "à la main" demandés sur une feuille séparée. Pensez par ailleurs à structurer votre feuille de calcul *Maxima* (avec numéro des exercices, des questions...).

Sauf indication contraire, on utilisera au maximum *Maxima* pour effectuer les calculs. Il pourra aussi être utilisé pour vérifier des calculs effectués à la main.

Exercice 1.

Résoudre l'équation $x^3 - 5x^2 - 2 = 0$. Donner une valeur approchée de la première solution donnée par Maxima. Comparer en utilisant `find_root(x3 - 5x2 - 2 = 0, x, a, b)`. Tester avec différentes valeurs de a et b

Exercice 2.

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \ln(x^3 + ax + 1)$ où a est un paramètre réel.
2. Soient $f : x \mapsto x^5$ et $g : x \mapsto \ln x$. Calculer la dérivée de $g \circ f$.
3. Soit f comme précédemment. Construire la séquence des $f'(i)$, pour i variant de 1 à 20.

Exercice 3

Calculer une primitive des fonctions suivantes $x \mapsto \sin(x) \tan(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x) - (\cos(x))^2}$ et $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

Exercice 4

Calculer $\int_0^1 e^{-t^2} dt$. Donner une valeur approchée de l'intégrale.

Exercice 5

Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes.

1. $2e^x \sqrt{1 + 4x} - \sqrt{1 + 6x^2}$ en 0.

2. $(\cos x)^{(\sin x)} - (\cos x)^{(\tan x)}$ en 0.
3. $\sqrt{x^2 + 1} - 2 \times \sqrt[3]{x^3 + x} + \sqrt[4]{x^4 + x^2}$ en $+\infty$.

Exercice 6. (utilisation de Maxima pour une étude de fonction)

On étudie ici une fonction utilisée pour modéliser la vitesse du vent dans le cadre de l'implantation d'éoliennes. L'intégralité de cet exercice se résout à l'aide du logiciel de calcul formel Maxima.

Soit la f fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{18} x e^{-\frac{x^2}{36}}.$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, les unités graphiques étant de 0,5 cm sur l'axe des abscisses et de 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Définir dans Maxima la fonction f et calculer à l'aide du logiciel $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. (a) A l'aide du logiciel Maxima, calculer $f'(x)$, factoriser son expression et définir dans Maxima cette expression comme la fonction $f1$.
(On donne le nom $f1$ à la fonction dérivée car Maxima n'accepte pas le nom f' .)
(b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$ et donner le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$. On y fera figurer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du maximum de la fonction f .
3. (a) Avec Maxima, calculer le développement limité de $f(x)$, à l'ordre 3, au voisinage de zéro.
(b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, et la position relative de T et de C au voisinage de ce point.
4. (a) Avec le logiciel, calculer $f''(x)$ et résoudre $f''(x) = 0$. On appellera a la solution strictement positive de cette équation. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de a , de $f(a)$ et de $f'(a)$.
(b) En déduire une équation de la tangente T' à la courbe C au point d'abscisse a et étudier la position relative de T' et de C .