Université de Versailles Année 2013-2014
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA350.html` semestre 1

Maths/Ordi, TP 8: interpolation avec Maxima

Vous effectuerez les calculs "à la main" demandés sur une feuille séparée.

1 Polynômes d'interpolation de Lagrange

1. Tapez la commande `load(interpol)` pour charger le package permettant d'effectuer une interpolation polynomiale. En utilisant la commande Maxima `lagrange`, donnez le polynôme d'interpolation passant par les points $(0,0)$; $(1,16)$; $(2,3)$; $(5,-2)$; $(7,8)$.

2. Vérifiez par le calcul que Maxima a bien calculé le polynôme d'interpolation demandé.

3. Tracer ce polynôme.

2 Interpolation par une subdivision régulière

Soit $g : x \mapsto \sin(x)$ définie sur $[0, 3\pi]$ et soit $h : x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$ définie sur $[-1, 1]$.

1. Créez une procédure `subreg(a,b,n,f)` qui permet d'obtenir une subdivision régulière avec n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de $[a, b]$, c'est-à-dire une procédure qui donne en sortie le vecteur $X = [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]..., [x_{n+1}, f(x_{n+1})]$ où $x_1 = a$, $x_2 = a + \frac{b-a}{n}$,...,$x_{n+1} = b$.

2. On considère ici une subdivision régulière de $[0, 3\pi]$ avec 5 sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$.

   (a) Tracez sur un même graphique la courbe représentative de g et le polynôme d'interpolation P passant par les points $(x_i, \sin(x_i))$.

(b) Modifiez la procédure précédente pour obtenir la procédure `traceapprox(a,b,n,f)` qui pour subdivision régulière avec n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de $[a, b]$, et pour une fonction quelconque f, trace sur un même graphique la courbe représentative de f et le polynôme d'interpolation P passant par les points $(x_i, f(x_i))$.

(c) Testez votre procédure sur g avec des subdivisions régulières où $n = 2, 3, 4, ..., 9$.

3. Phénomène de Runge : on considère maintenant la fonction h.
Testez votre procédure `traceapprox` sur h avec des subdivisions régulières de $[-1, 1]$ pour n allant par exemple de 2 jusqu'à 16. Que se passe-t-il ?

3 Interpolation avec les points de Chebyshev

Pour éviter le phénomène de Runge, on utilise la subdivision donnée par $X = (x_1, x_2, ..., x_{n+1})$, où x_i sont les points dits de Chebyshev. Pour simplifier, on considèrera le cas $[a, b] = [-1, 1]$ dans cette question. A n fixé, les points de Chebyshev notée ici $t_1, ..., t_{n+1}$ sont les $n + 1$ racines du polynôme de Chebyshev

$$T_{n+1}(t) = \cos((n + 1) \arccos(t)).$$

On a facilement que les points de Chebyshev sont

$$t_i = \cos\left(\frac{(2i - 1)\pi}{2n + 2}\right)$$

et permettent donc bien d'obtenir une subdivision de $[-1, 1]$.

1. (a) A l'aide de la commande Maxima `chebyshev_t(n,t)`, calculer les 5 premiers polynômes de Chebyshev T_0, T_1, T_2, T_3, T_4.

   (b) Calculer pour $n = 7$ par exemple, les valeurs approchées des 8 points de Chebyshev.

2. Créez une procédure `ptcheby(n)` qui calcule les $n+1$ points de Chebyshev pour T_n.

3. Modifier la procédure `traceapprox` pour utiliser les points de Chebyshev au lieu des points de la subdivision régulière. Tester cette nouvelle procédure sur la fonction h pour différentes valeurs de n (on fera des graphes pour différentes valeurs de n).

4. Que peut-on en conclure ?

Remarque : pour une fonction f définie sur $[a,b]$, on calcule une subdivision $x_1 = \lambda(t_1), x_2 = \lambda(t_2), .., x_{n+1} = \lambda(t_{n+1})$ de $[a,b]$ où $t_1, .., t_{n+1}$ sont les points de Chebyshev et où λ est le changement de variable :

$$\lambda : \begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & [a,b] \\ t & \mapsto & x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}. \end{array}$$

Il existe d'autres types d'interpolation : par polynômes trigonométriques, par splines...