Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines
Eugenio Echagüe

MA 350
Année 2013/2014

**Contrôle du lundi 14 octobre 2012**

*Durée: 1,5 heures*

*La qualité de la rédaction constituera un élément important d'appréciation*

**Indication** Toutes les fonctions que vous allez créer ou utiliser ainsi que toutes les instructions (`plot2d`, `int`, etc) dont vous allez vous servir doivent être écrites sur un même script que vous allez sauvegarder sous le nom NOM_PRENOM.sci. Ce fichier, vous allez le sauvegarder sous une clé USB et vous allez l'envoyer par mail à l'adresse *eugenio.echague@uvsq.fr*. Le sujet du mail sera Côntrole 1 MA350.

**Exercice 1.** On considère l'équation

$$\log(t+1) - t = 0. \tag{1}$$

a. Vérifier que $t^* = 0$ est une solution exacte de l'équation 1.

b. Utiliser la méthode du point fixe et montrer sur un graphique (échelle normale pour les abscisses et échelle logarithmique pour les ordonnées) que la suite générée à partir de $t_0 = 1$ converge vers $t^*$. On fixe le nombre d'itérations à $N = 500$. On voudra ce graphique en bleu, le style correspondant à la couleur bleue est le 2. **Conseil:** Utiliser l'équation équivalente $t = \log(t+1)$.

**Exercice 2.** Un problème de Cauchy consiste à trouver la solution d'une EDO scalaire ou vectorielle satisfaisant à des conditions initiales. Par exemple, dans le cas scalaire, si $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant le point $t_0$, un problème de Cauchy associée à une EDO du premier ordre consiste à trouver une fonction réelle $y \in C^1(I)$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, x(t)), \ t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Sous certaines conditions, l'existence d'une solution (et l'unicité) est garantie.
Abordons l'approximation numérique du problème de Cauchy: on fixe $T > t_0$ et on note $I = [t_0, T]$ l'intervalle d'intégration. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $h = \frac{T-to}{N}$ appelé $h$ pas de discrétisation. On définit $t_n = t_0 + nh$, et on appelle $u_n$ l'approximation de la solution exacte $y(t_n)$, notée dans la suite $y_n$. De même, $f_n$ désigne la valeur $f(t_n, u_n)$. On pose naturellement $u_0 = y_0$.

La méthode de Heun propose de calculer la suite $(u_n)_{0\leq n\leq N}$ de la façon suivante:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f_n + f(t_{n+1}, u_n + hf_n)]$$

Utiliser la méthode Heun pour résoudre sur l'intervalle $I = [0\ 5]$ le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = (-2t)y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Pour ceci, créer une fonction que vous allez appeler `heun` ayant pour entrée $N$, $f$, $t_0$ et $y_0$ dont les sorties doivent être un vecteur $\mathbf{X}$ contenant chaque instant $t_n$ où la fonction est approximée et un autre vecteur $\mathbf{U}$ avec les valeurs de l'approximation à chaque instant mesuré.

a. Afin de résoudre le problème, utiliser la fonction `heun` avec $N = 1000$.

b. À l'aide de `plot2d`, tracer sur un graphique la solution trouvée par la méthode de Heun sur l'intervalle $I$. Afin qu'il s'affiche sur une fenêtre graphique différente de celle de l'exercice 1, dans la ligne qui précède la commande, vous devez mettre la commande `figure()`. Le style choisi pour cette courbe sera le 5 (ligne rouge continue).

c. Vérifiez que la fonction $y^*(t) = \exp(-t^2)$ est la solution exacte du problème de Cauchy. À l'aide de `plot2d` et sur le même graphique, tracer sur l'intervalle $I$ la courbe qui correspond à cette fonction. Le syle choisi pour cette courbe sera le 7 (ligne jaune continue)

d. Comparez la convergence de la méthode de Heun face à celle de la méthode d'Euler.

   Pour cela, considérez la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui mesure pour une valeur de $N \in \mathbb{N}$ donnée, l'écart maximal (en valeur absolue) entre la solution et sa valeur approchée, aux points de l'intervalle $I$ où la solution a été approchée par la méthode d'Euler. De même, considérez la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui mesure l'écart maximal (en valeur absolue) entre la solution et sa valeur approchée, au points de l'intervalle $I$ où la solution a été approchée par la méthode de Heun.

   Tracez dans un graphique les fonctions $f$ et $g$ sur l'intervalle $[20, 1000]$ en échelle logarithmique pour les deux axes, en rouge la courbe qui correspond à l'erreur de la méthode d'Euler et en bleu celle qui corresponde à la méthode de Heun.