Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines
Eugenio Echagüe

MA 350
Année 2013/2014

Contrôle du lundi 3 décembre 2013

Durée: 1,5 heures

La qualité de la rédaction constituera un élément important d'appréciation

Indication Toutes les instructions que vous allez utiliser doivent être écrites sur la même feuille de travail que vous allez sauvegarder sous le nom NOM_PRENOM.wxm. Ce fichier, vous allez le sauvegarder vous allez l'envoyer par mail à l'adresse *eugenio.echague@uvsq.fr*. Le sujet du mail sera Côntrole 2 MA350.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+2z \\ -5x+3y+3z \\ -3x+y+3z \end{pmatrix}.$$

a. Définir la fonction f dans Maxima.

b. Soit $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans Maxima, évaluer f dans chacun des vecteurs de B_c. A partir des vecteurs trouvés, construire la matrice de l'endomorphisme f dans B_c. Cette matrice sera appelée A.

c. Dans Maxima et à partir de A, calculer l'expression factorisée du polynôme caractéristique de f. Remarquer que les valeurs propres sont 1 et 2.

d. Trouver dans Maxima à l'aide de la bonne commande, deux vecteurs propres de f. On appellera b_1 au vecteur propre associé à 1 et b_2 au vecteur propre associé à 2. Remarquer que f n'est pas diagonalisable mais triagonalisable.

e. Afin de triagonaliser f, nous allons chercher un vecteur (linéairement indépendant avec les vecteurs trouvés dans l'item précédent) dans le noyau de $C = (A - Id_3)^2$, où Id_3 est la matrice identité d'ordre 3. Calculer C et utiliser la commande qui permet de résoudre le système qui calcule son noyau et y choisir un vecteur b_3 pertinent dont sa dernière composante sera 11.

f. Vérifier que $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

g. Calculer dans Maxima $f(b_3)$. À partir de la bonne matrice de changement de base, trouver les coordonnées de $f(b_3)$ dans la base B.

h. Écrire la matrice T de f dans la base B, cette matrice est une matrice triangulaire supérieure.

i. Vérifier dans Maxima que $A = PTP^{-1}$, où P est une matrice de changement de base appropriée.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh(x) - 1}, & \text{si } x \neq 0 \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a. Trouver la valeur de l afin que f soit continue en $x_0 = 0$. Dans la suite, on donne à l cette valeur.

b. Montrer, en utilisant la définition de dérivée, que f est dérivable en $x_0 = 0$.

c. On assume que f est dérivable jusqu'à l'ordre 3 en $x_0 = 0$. Montrer, en utilisant en développement limité à l'ordre 3 centré en $x_0 = 0$ que la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 = 0$ la traverse.

Exercice 3. Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^{3/2}$.

a. Vérifier sur un graphique que $g(x) \geq h(x) \geq 0$ si $x \in [0, 1]$.

b. Calculer l'aire comprise entre les courbes représentatives de g et h sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 4. Dans Maxima, calculer les 20 premiers termes de la suite de Fibonacci:

$$u_0 = 0; \ u_1 = 1$$

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \qquad \text{si } n \geq 0$$

Vérifier que le suite

$$v_k = \frac{u_k}{u_{k-1}} \qquad \text{si } n \geq 2$$

converge vers le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.