Université de Versailles — Année 2013-2014
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA350.html` — semestre 1

MA350, EXAMEN FINAL

Les programmes Scilab et Maxima seront implémentés sur votre ordinateur puis envoyés à l'adresse `laurent.dumas@uvsq.fr` *à la fin de l'examen.*

L'ensemble des programmes Scilab (respectivement Maxima) sera envoyé sous la forme d"un seul fichier dénommé MA350-n.sci (respectivement MA350-n.wxm) où n représente votre numéro d'anonymat.

Une copie manuscrite sera également rendue en complément pour expliquer la démarche et éventuellement résoudre les trois exercices.

Exercice 1 On cherche à résoudre une équation du type $f(x) = 0$ de manière approchée avec l'algorithme suivant : on construit une suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ telle que :

(i) x_0 et x_1 sont distincts quelconques,

(ii) pour tout $n \geq 1$, on a :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$

1. Ecrire un programme Scilab permettant de calculer la suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ pour une fonction f quelconque.
2. On considère la fonction $f(x) = x^3 + x - 4$. Déterminer avec Maxima l'unique solution réelle x^* de l'équation $f(x) = 0$.
3. Utiliser la méthode précédente pour calculer de manière approchée x^* en prenant $x_0 = 4$ et $x_1 = 2$.
4. Combien faut-il d'itérations de l'algorithme précédent pour obtenir une approximation à 10^{-10} près de x^* ? Commenter.

Exercice 2 On cherche à étudier sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ à l'aide de Maxima la fonction :

$$f(x) = (4x - 2)\ln(2x - 1) + 6x$$

1. Représenter graphiquement avec Maxima la courbe associée à f sur $]\frac{1}{2}, 5[$.
2. Calculer la dérivée de f avec Maxima et en déduire ses variations.
3. Calculer les limites de de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Donner l'allure de la courbe représentative de f près de $\frac{1}{2}$ avec l'aide de Maxima. Commenter.
5. Calculer la dérivée seconde de f avec Maxima et en déduire sa convexité.

Exercice 3 On désire résoudre l'équation différentielle (ED) suivante :

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \tag{ED}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = -1$.
On pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

On note Y' le vecteur dérivée de Y, c'est-à-dire

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ecrire l'équation (ED) sous la forme matricielle équivalente

$$Y'(t) = AY \tag{3}$$

1. On résout d'abord cet exercice sur feuille.
   (a) Diagonaliser la matrice A sous la forme $A = PDP^{-1}$.
   (b) On pose $Z = P^{-1}Y$. Calculer $Z(0)$ et montrer que $Z' = DZ$.
   (c) Résoudre cette équation, c'est-à-dire trouver l'expression de $Z(t)$ en fonction de t.
   (d) En déduire l'expression de $Y(t)$ puis de $y(t)$.
2. On reprend cet exercice avec Maxima
   (a) Essayer de résoudre directement l'équation (ED) avec Maxima. Qu'obtient-on ?
   (b) Diagonaliser la matrice A avec Maxima
   (c) En posant comme précédemment $Z = P^{-1}Y$, déterminer la valeur de $Z(0)$ puis celle de $Z(t)$ avec Maxima.
   (d) En déduire l'expression de $Y(t)$ puis de $y(t)$. Tracer la solution $t \mapsto y(t)$ sur $[0, 2]$ avec Maxima.
3. On reprend cet exercice avec Scilab
   (a) Ecrire un script permettant de calculer les solutions de (ED) avec les conditions initiales choisies sur l'intervalle de temps $[0, 2]$.
   (b) Représenter graphiquement la solution $t \mapsto y(t)$ obtenue. Comparer les deux approches Scilab/ Maxima.