Nom : Prénom :

Sauvegardez votre script sous le nom NOM_PRENOM_NO-EXO.sci et envoyez-le par email à l'adresse bernhard.elsner@math.uvsq.fr.
Sujet de l'email : Côntrole 2 MA350.

Exercice 1 — *Approximation rationnelle*

Le but de l'exercice est de trouver, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donnés, le nombre rationnel de dénominateur au plus n et qui est le plus proche de x.

1. En utilisant la commande `floor` écrire une fonction `numerateur(x,q)` qui donne $p \in \mathbb{Z}$ tel que la distance entre $\frac{p}{q}$ et x soit minimale. Tester que `numerateur(%pi,3)` donne bien 9.

2. Écrire une fonction `prox(x,n)` qui donne le couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q \leqslant n$ et tel que la distance entre $\frac{p}{q}$ et x soit minimale.
Avec la commande `numerateur(%pi,1000)` vous trouverez que $\frac{355}{113}$ est la meilleure approximation rationnelle de π avec un dénominateur plus petit que 1000. Question bonus : Quelle est la prochaine avec un dénominateur plus grand ?

Exercice 2 — *Ressorts couplés*

Deux masses m_1 et m_2 sont fixés à des ressorts de raideurs respectives k_1 et k_2 ; en plus ils sont reliés par un troisième ressort de raideur k. On note x_1 et x_2 les écarts par rapport à la position de repos (voir figure). Alors, sous l'hypothèse que les oscillations sont petites, les équations de mouvement sont

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2) \\ \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Dans la suite on prendra $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = 1$ et $k = 0.1$.

1. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ les vitesses sont nulles et que $x_1(0) = 0.1$. Résoudre le système sur l'intervalle de temps $[0, 150]$ pour les trois cas suivants :

$$x_2(0) = -0.1, \qquad x_2(0) = 0.1, \qquad x_2(0) = 0.$$

2. Pour chacun des trois cas représenter les oscillations des deux masses. Que constatez-vous ? Interpréter ces mouvements.

3. Pour modéliser plus proche de la réalité on introduit, pour chaque masse, un terme de frottement proportionnel à la vitesse ; on note α le facteur de proportionnalité. Quelles sont alors les équations de mouvement ?
En prenant $\alpha = 0.07$, résoudre le système sur l'intervalle de temps $[0, 150]$ avec les mêmes conditions initiales qu'au premier cas de la question précédente. Plotter la solution.

Exercice 3 — *RK*

Le but de l'exercice est de résoudre une équation différentielle selon la méthode d'Euler, puis selon la méthode d'Euler composée (aussi appellée Runge-Kutta d'ordre 2).

1. Programmer une fonction `euler(f,a,b,y0,n)` qui utilise la méthode d'Euler à n pas pour résoudre l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, $y(a) = y_0$ sur l'intervalle $[a, b]$. Votre programme doit renvoyer le couple `[T,Y]` où `T` est la liste des temps et `Y` la liste des valeurs de y.

2. Tester le programme que vous venez d'écrire sur l'équation de Bernoulli

$$y' = -y + ty^2, \; y'(0) = 1, \qquad t \in [0, 10].$$

Prenez pour cela $n = 300$. Comparez avec la solution exacte $t \mapsto (t+1)^{(} - 1)$.

3. Programmer une fonction `rk2(f,a,b,y0,n)` qui fait la même chose, cette fois avec la méthode d'Euler composée :

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(t + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t, y_k)\right), \qquad k = 0, \ldots, n-1, \qquad h = \frac{b-a}{n}.$$

Tester aussi avec $n = 300$ sur l'équation de Bernoulli. Que constatez-vous ?