NOM : PRÉNOM :

Attention aux signes − devant le fractions, Maxima ne les rend pas bien visibles !

Exercice 1 —

Pour cet exercice vous ne rendez pas de programme Maxima, mais vous écrivez les résultats sur cette feuille. Vous pouvez vous servir du logiciel quand bon ça vous semble. Vous trouverez des commandes utiles dans le menu algèbre. Le menu des simplifications (radicaux et complexes) peut également rendre service pour vérifier des résultats.

Soit $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^R$ donné par

$$M_{\mathscr{E}}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1+\sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ déterminer $f^n(e_3)$.

2. Est-ce que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

3. Trouver une base $\mathscr{B}$ dans laquelle f est représenté par une matrice diagonale D. Écrire ci-dessous D ainsi que la matrice de passage $P_{\mathscr{E}\mathscr{B}}$.

4. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ des écritures simples des matrices D^{4n}, D^{4n+1}, D^{4n+2} et D^{4n+3}.
(On pourra passer en coordonnées polaires.)

5. Pour tout endomorphisme g on note $\operatorname{ord}(g) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid g^n = id\}$ l'ordre de g. Ainsi l'ordre est dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

5.a. Déduire de la question précédente l'ordre de f.

5.b. Quelle est la matrice de f^{2014} dans la base canonique ?

Exercice 2 —

On dit qu'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est magique si les sommes des coefficients par lignes et par colonnes donnent toutes le même nombre. La matrice identité, par exemple, est magique car toutes les sommes en question valent 1. On note E l'espace des matrices magiques.

1. (Sur papier.) On identifie $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^9$ (en écrivant, par exemple, ligne par ligne les coefficients des matrices). Trouver une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^9$ dont le noyau est E.

2. (Avec Maxima.) Déterminer la dimension de E ainsi qu'une base.

Exercice 3 — *Très touchant*

On considère les fonctions

$$f \ : \ x \longmapsto \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)),$$
$$g \ : \ x \longmapsto \arcsin(\arctan(x)) - \arctan(\arcsin(x)).$$

1. Représenter dans un même graphique les courbes de f et g au voisinage de 0. D'après ce graphique, semblent-elles être sécantes en 0 ou se touchent-elles ?

2. On note $u = f - g$ et $v = f/g$. Pour chacune des quatre fonctions f, g, u et v déterminer l'équation de la tangente en 0 et expliciter sa position par rapport à la courbe.

3. On pose $V(x) = \int_0^x v(t)\mathrm{d}t$.

3.a. Sans utiliser Maxima donner les trois premiers termes du développement limité de V en 0.

3.b. Répondre à la même question avec Maxima. Le résultat est-il cohérent ?

Exercice 4 — *Nombres de Stern*

Un *nombre de Stern* est un nombre premier qui n'est pas la somme d'un nombre premier et du double du carré d'un nombre entier non nul. Autrement dit, un nombre premier p est de Stern s'il ne se laisse pas écrire comme $p = q + 2k^2$ avec q premier et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Écrire une fonction `stern(p)` qui, pour un nombre premier p donné, renvoie 1 s'il est de Stern et 0 sinon.
Vérifier que $2, 3, 17$ et 137 sont de Stern.

2. Écrire une fonction `Stern(n)` qui, pour un entier naturel n donné, renvoie la liste des nombres de Stern inférieurs à n.
Trouver les huit plus petits nombres de Stern.

Commandes utiles : `primep` *et* `next_prime`.

Remarque – *A nos jours on n'a pas trouvé d'autres nombres de Stern que ces huit là !*

Corrigé de l'exercice 1 —

1. Comme $f(w) = -\frac{1}{2}w$ on sait que w est un vecteur propre de f de valeur propre -1. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad f^n(w) = (-1)^n w.$$

2. On rentre la matrice $A = M_{\mathscr{B}}(f)$,

```
A:matrix(
 [1,-1,0],
 [1,1,0],
 [1+sqrt(2),1,-sqrt(2) ] );
```

et on lance la commande

```
L:eigenvectors(A)
```

On obtient la liste `L` des valeurs propres et vecteurs propres correspondant. Les valeurs propres $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et -1 étant distinctes et non-réelles, f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. Les vecteurs propres constituent une base $\mathscr{B}$ telle que

$$D = M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P = P_{\mathscr{E}\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on ne veut pas recopier les donnés, on peut utiliser

```
D:matrix( [L[1][1][1],0,0],
          [0,L[1][1][2],0],
          [0,0,L[1][1][3]] );
P:transpose(
 matrix( L[2][1][1], L[2][2][1], L[2][3][1] ) );
```

3. En écriture polaire $\frac{1\pm i}{2}$ s'écrit $e^{\pm i\pi/4}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} e^{-in\pi/4} & 0 & 0 \\ 0 & e^{in\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix},$$

d'où

$$D^{4n} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D^{4n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2}(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{2}(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D^{4n+2} = \begin{pmatrix} i(-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & i(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D^{4n+3} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}(-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{2}(-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. 4.a. On voit directement sur les réponses ci-dessus que D^k est l'identité si et seulement si k est un multiple de 8. Cela prouve que f est d'ordre 8. D'ailleurs on vérifie aisément avec Maxima que A^8 est la matrice identité.

4.b. Comme $2014 = 4 \times 503 + 2$ on a, d'après la formule pour D^{2n+2},

$$M_{\mathscr{E}}(f^{2014}) = A^{2014} = P^{-1} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient le même résultat en observant que $2014 \equiv 6 \mod 8$ et en calculant A^6.

Corrigé de l'exercice 2 —

1. On peut prendre

$$\varphi \ : \quad \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^5, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b+c-d-e-f \\ a+b+c-g-h-i \\ b+c-d-g \\ a+c-e-h \\ a+b-f-i \end{pmatrix}.$$

2. Dans les bases canoniques l'application linéaire φ est représentée par la matrice A suivante

```
A:matrix(
 [1,1,1,-1,-1,-1,0,0,0],
 [1,1,1,0,0,0,-1,-1,-1],
 [0,1,1,-1,0,0,-1,0,0],
 [1,0,1,0,-1,0,0,-1,0],
 [1,1,0,0,0,-1,0,0,-1]    );
```

On détermine son noyau avec la commande `nullspace(A)`. On a $\dim(E) = 5$ car Maxima donne cinq vecteurs d'une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Corrigé de l'exercice 3 — *Très touchant*

1. On définit les fonctions

```
f(x):=sin(tan(x))-tan(sin(x));
g(x):=asin(atan(x))-atan(asin(x));
u(x):=f(x)-g(x);
v(x):=f(x)/g(x);
```

Avec `plot2d([f(x),g(x)],[x,1,1])`- on voit que les courbes de f et g se touchent en 0.

2. On passe par des développements limités.

```
taylor(f(x),x,0,11);
taylor(g(x),x,0,11);
taylor(u(x),x,0,11);
taylor(v(x),x,0,4);
```

Les courbes des fonctions f, g et u ont l'axe des abscisses $y = 0$ comme tangente à l'origine. Chacune traverse la tangente car le premier terme non constant dans le développement limité est d'ordre impair.
La courbe de v a la droite horizontale $y = 1$ comme tangente au point d'abscisse 0. Elle ne traverse pas la tangente car le premier terme non constant dans le développement limité est d'ordre pair.

3. 3.a. Comme $v(x) = 1 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{1313}{1890}x^4 + O(x^6)$ on obtient

$$V(x) = x + \frac{5}{9}x^3 + \frac{1313}{9450}x^5 + O(x^7).$$

3.b. On laisse Maxima (version 14.09.0) faire le travail :

```
V(x):=integrate(v(t),t,0,x);
taylor(V(x),x,0,5);
```

Ca donne le faux résultat suivant !

$$V(x) = x + \frac{35}{9}x^3 + \frac{40703}{9450}x^5 + O(x^7).$$

Corrigé de l'exercice 4 — *Nombres de Stern*

1. On fait une boucle sur k. La variable t vaut 1 au début, puis elle devient 0 dès que $p - 2k^2$ est premier.

```
stern(p):= block(  [k,t],
 k:1, t:1,
 while (k<(p/2)^(1/2) and t=1) do
 if primep(p-2*k^2) then t:t-1
 else k:k+1,
 return(t)   )
```

2. On fait une boucle sur p.

```
Stern(n):=block(  [p,L],
p:2, L:[],
while p<=n do
(if stern(p)=1 then L:endcons(p,L),
p:next_prime(p)),
return(L)   );
```

La commande `Stern(2000)` donne les huit plus petits nombres de Stern $2, 3, 17, 137, 227, 977, 1187, 1493$.