Université de Versailles
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA350.html`

Année 2014-2015
semestre 1

MA350, TP 11: EDO avec Maxima et Scilab

Exercice 1 (*issu de session 1, année 2014*)

On désire résoudre l'équation différentielle (ED) suivante :

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \tag{ED}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = -1$.
On pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

On note Y' le vecteur dérivée de Y, c'est-à-dire

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ecrire l'équation (ED) sous la forme matricielle équivalente

$$Y'(t) = AY \tag{3}$$

1. On résout d'abord cet exercice sur feuille.
   (a) Diagonaliser la matrice A sous la forme $A = PDP^{-1}$.
   (b) On pose $Z = P^{-1}Y$. Calculer $Z(0)$ et montrer que $Z' = DZ$.
   (c) Résoudre cette équation, c'est-à-dire trouver l'expression de $Z(t)$ en fonction de t.
   (d) En déduire l'expression de $Y(t)$ puis de $y(t)$.
2. On reprend cet exercice avec Maxima
   (a) Essayer de résoudre directement l'équation (ED) avec Maxima. Qu'obtient-on ?
   (b) Diagonaliser la matrice A avec Maxima
   (c) En posant comme précédemment $Z = P^{-1}Y$, déterminer la valeur de $Z(0)$ puis celle de $Z(t)$ avec Maxima.
   (d) En déduire l'expression de $Y(t)$ puis de $y(t)$. Tracer la solution $t \mapsto y(t)$ sur $[0, 2]$ avec Maxima.
3. On reprend cet exercice avec Scilab
   (a) Ecrire un script permettant de calculer les solutions de (ED) avec les conditions initiales choisies sur l'intervalle de temps $[0, 2]$.

(b) Représenter graphiquement la solution $t \mapsto y(t)$ obtenue. Comparer les deux approches Scilab/ Maxima.

Exercice 2 (*issu de session 2, année 2014*)

On considère le système de réactions chimiques suivant :

(i) $2A \to A + B$ avec une constante de réaction k_1

(ii) $A + B \to 2A$ avec une constante de réaction r

(iii) $B \to C$ avec une constante de réaction k_2

où A, B et C sont trois espèces chimiques différentes (plus précisément, B représente l'espèce A "activée" préalablement en sa dissociation en l'espèce C)

1. On suppose que les trois espèces ont pour concentrations initiales respectives $A_0 \geq 0$, $B_0 \geq 0$ et $C_0 = 0$; en notant $A(t)$ et $B(t)$ les concentrations respectives à l'instant t de A et B, déterminer un système de deux équations différentielles régissant $A(t)$ et $B(t)$. On rappelle la relation cinétique générale pour une réaction du type $\alpha M + \beta N \to P + Q$ de constante k : $P'(t) = kM(t)^\alpha.N(t)^\beta$. Par exemple, pour la seule première équation du présent système, on peut écrire : $A'(t) = -kA^2(t)$.
2. Résoudre numériquement avec Scilab le système d'équations différentielles précédent,

   - tout d'abord avec l'instruction `ode` de Scilab,

   - ensuite avec la méthode d'Euler décrite en cours,

   et comparer les résultats obtenus graphiquement.

   On pourra prendre les valeurs suivantes : $(A_0, B_0) = (1, 0)$, $(k_1, r, k_2) = (0.2, 0.1, 0.001)$ et rechercher les solutions approchées sur l'intervalle de temps $[0, 300]$.

Exercice 3 Les logiciels Scilab et Maxima permettent de tracer les solutions approchées $t \mapsto (x(t), y(t))$ (appelé portrait de phase) d'un système d'EDO quelconque du type :

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

à l'aide des commandes respectives `ode` et `plot` pour Scilab et `plotdf` pour Maxima.

Dans le cas du pendule non amorti pour lequel $\theta'' = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$ où $\theta(t)$ représente l'angle du pendule par rapport à la verticale, représenter le portrait de phase associé avec Scilab et Maxima en prenant $(x, y) = (\theta, \theta')$.