Maths/Ordi, TP 12: révisions Scilab/Maxima

Exercice 1 On cherche à approcher une intégrale du type $I = \int_a^b f(t)dt$ par la méthode du point milieu :

$$I \simeq I_n = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a + (i + \frac{1}{2})h)$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

1. Ecrire un programme Scilab permettant de calculer I_n pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une fonction f quelconques.
2. On considère la fonction $f(x) = cos^3 x + x$. Déterminer avec Maxima la valeur exacte de l'intégrale de f entre 0 et π.
3. Calculer avec Scilab la valeur approchée I_n associée à l'intégrale précédente pour un valeur de n quelconque et représenter $|I_n - I|$ en fonction de n en double échelle log-log.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 2 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit v un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Montrer que λ est réel et que les composantes v_i de v vérifient la relation :

   $$v_{i+1} - (2 - \lambda)v_i + v_{i-1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

   en supposant $v_0 = v_{n+1} = 0$.
2. On suppose que λ est une valeur propre de A dans l'intervalle $]0, 4[$.
   Montrer que les racines distinctes r_1 et r_2 du polynôme $r^2 - (2 - \lambda)r + 1 = 0$ sont complexes et conjuguées. On note $r_1 = \rho e^{i\theta}$. Montrer qu'on a nécessairement $\sin((n + 1)\theta) = 0$ et $\rho = 1$.

3. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de A est donné par :
   $\lambda_k = 4\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ avec $k \in \{1, ..., n\}$.
4. Déterminer avec Maxima les valeurs propres de A pour $n = 2, 3, 4$ et 5 et vérifier le résultat précédent.
5. On note $J = \frac{1}{2}(2I_n - A)$. Montrer que J est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement plus petites que 1.
6. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On construit la suite$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et
   $$x_{k+1} = \frac{1}{2}((2I_n - A)x_k + b)$$
7. Soit $n = 5$. Ecrire un programme Maxima calculant la suite$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir d'un élément b quelconque et de x_0 égal au vecteur nul.
8. Vérifier avec Maxima que pour tout valeur de b, $Ax_k - b$ converge vers 0. Que peut-on en conclure ?