

## Maths/Ordi, TP 4: résolution d'équations différentielles

Cette séance traite de la résolution des équations (ou systèmes d'équations) différentielles avec **Scilab**. On rencontre en effet fréquemment de telles équations dans de nombreux domaines (mécanique, chimie, biologie, etc). Après deux exemples de résolution d'équations d'ordre 1 puis 2, un problème de mécanique céleste est abordé.

**Premiers exemples de résolution d'équations différentielles** Le logiciel **Scilab** permet de résoudre de manière approchée toute équation (ou système d'équations) différentiel du type

$$y' = f(t, y) \quad (1)$$

complétée par la condition initiale  $y(t_0) = y_0$  (sous réserve d'existence et d'unicité de la solution). L'instruction correspondante, de type "boîte noire", s'appelle **ode** et nécessite la donnée de quatre arguments : la donnée initiale  $y_0$ , le temps initial  $t_0$ , les instants de calcul de la solution et la fonction  $f$  (toujours à deux arguments  $t$  et  $y$ ). Par exemple, la série d'instructions<sup>1</sup>

```
deff('dy=fct(t,y)', 'dy(1)=cos(t)*y(2); dy(2)=y(1)-y(2)')
t0=0; y0=[10; 2]; t=0:0.1:10;
z=ode(y0, t0, t, fct);
```

permet de calculer et de stocker dans la variable  $z$  les solutions du système d'équations différentielles (d'inconnues  $y_1$  et  $y_2$ ) :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= \cos(t)y_2(t), \\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t), \\ y_1(0) &= 10, \\ y_2(0) &= 2 \end{cases}$$

aux instants  $t = 0, 0.1, 0.2, \dots$ , jusqu'à  $t = 10$ . Pour tracer ensuite  $y_1$  en fonction de  $t$ , on pourra taper **plot2d(t, z(1, :))**. Même si la fonction  $f$  dans l'équation (1) ne dépend pas de la variable  $t$  ou de la variable  $y$ , il faut quand même la définir comme fonction de ces variables. Il est possible de résoudre avec **Scilab** les équations d'ordre supérieur à 1, en récrivant celle ci comme un système d'équations d'ordre 1.

---

1. La fonction **fct**, définie ici directement dans le script avec l'instruction **deff** peut aussi être définie avec les instructions **function** et **endfunction**.

**Exercice 1** Résoudre sur  $[0, 10]$  avec la méthode d'Euler l'équation de Bernoulli :

$$y' = -y + ty^2$$

avec la donnée initiale  $y(0) = 1$ . Commenter graphiquement la vitesse de convergence de la méthode.

**Exercice 2** On considère l'équation du pendule pesant :  $u'' + \sin(u) = 0$  avec les données initiales  $u(0) = 0$  et  $u'(0) = 1$ . En posant  $y = (u, u')^T$ , mettre le système différentiel vérifié par  $y$  sous la forme (1). Résoudre ce système sur  $[0, 10]$ . Tracer  $u$  et  $u'$  en fonction de  $t$ .

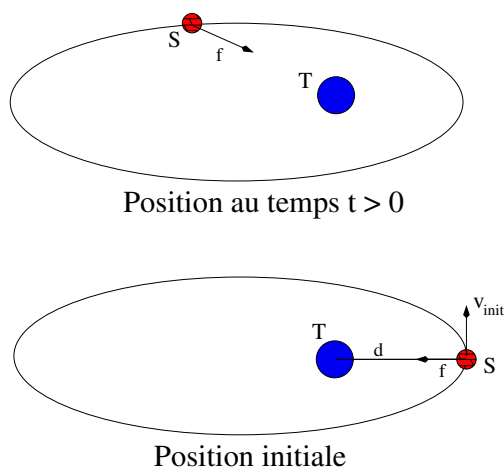


FIGURE 1 – Trajectoire d'un satellite S ( $O$  est le centre de la terre).

**Trajectoire d'un satellite terrestre** On recherche à présent la trajectoire d'un satellite lancé à partir d'une fusée. On rappelle que l'accélération vectorielle  $\vec{a}$  d'un satellite terrestre assimilé à un point  $S$  et de masse  $m$  est donnée par la relation fondamentale de la dynamique  $m\vec{a} = \vec{f}$  où la force gravitationnelle  $\vec{f}$  est un vecteur porté par la droite  $SO$ , dirigé de  $S$  vers  $O$  (centre de la terre) et de norme égale à  $g \frac{mM}{OS^2}$  où  $g = 6.67 \cdot 10^{-11}$  est la constante de gravitation universelle et  $M = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  est la masse de la terre.

**Exercice 3** Sachant que le satellite a été lancé avec une vitesse initiale  $\vec{v}_{init}$  comme sur la figure 1, à la distance  $d = 6\,500 \text{ km}$  du centre de la terre<sup>2</sup>, calculer sa trajectoire sur une journée et tracer celle-ci pour la vitesse initiale  $\|\vec{v}_{init}\| = 8\,000 \text{ m/s}$ , puis pour la vitesse  $\|\vec{v}_{init}\| = 10\,000 \text{ m/s}$ . Calculer l'apogée de la trajectoire, c'est-à-dire l'éloignement maximal de  $O$ . Que se passe-t-il pour  $\|\vec{v}_{init}\| = 12\,000$  ?

2. On considère que le rayon de la terre est de (environ et en moyenne)  $6\,400 \text{ km}$