Maths/Ordi, TP 6: utilisation de Scilab en probabilités

Cette séance traite de quelques possibilités de simulation en probabilités et statistiques. Après la présentation du générateur aléatoire et des représentations graphiques associées, on propose des exemples de simulation de lois usuelles (continues ou discrètes) ainsi que quelques problèmes.

1 Le générateur aléatoire de `Scilab`

1.1 Simulation d'une loi uniforme

L'instruction `rand` de Scilab permet de simuler une loi aléatoire uniforme [1] sur $]0,1[$. L'histogramme d'un échantillon peut être tracé avec l'instruction `histplot`.

Exercice 1

1. Effectuer un tirage de N réalisations indépendantes d'une loi uniforme avec l'instruction `rand`. En utilisant une instruction graphique de Scilab, vérifier visuellement que les valeurs choisies 'remplissent' uniformément le segment $]0,1[$. Prendre N assez grand, par exemple $N = 10\,000$.
2. Tracer ensuite l'histogramme en M classes de cet échantillon avec l'instruction `histplot` et comparer celui-ci avec la répartition théorique. Essayer plusieurs choix de $M \in \{10, 20, \sqrt{N}, \cdots\}$

Exercice 2 Écrire un programme permettant de simuler une loi uniforme [2] sur $]0,1[\times]0,1[$. En utilisant une instruction graphique de Scilab,, vérifier visuellement que les couples choisis 'remplissent' uniformément le carré $]0,1[\times]0,1[$.

1.2 Simulation d'une loi gaussienne

En prenant le troisième argument de l'instruction `rand` égal à `''n''`, on peut simuler une loi aléatoire gaussienne. [3]

Exercice 3 Effectuer un tirage de N réalisations indépendantes d'une loi gaussienne avec l'instruction rand. Tracer ensuite l'histogramme de cet échantillon avec l'instruction `histplot` et comparer celui-ci avec la répartition théorique.

---

1. loi de probabilité pour laquelle tous les réels entre 0 et 1 ont la même probabilité d'être choisis
2. tous les couples (x, y) avec $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$ ont la même probabilité d'être sélectionnés.
3. la probabilité de choisir un réel dans l'intervalle $[x, x + dx]$ est égal à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$.

1.3 Probabilités discrètes

L'instruction `rand` permet également de générer des lois discrètes (prenant un nombre fini de valeurs possibles) comme les lois de pile ou face ou de lancer d'un dé.

Exercice 4 Ecrire, en utilisant les instructions `rand` et `int` (partie entière) une fonction simulant le résultat du lancer d'un dé non pipé à six faces. Pour tester la validité de cette fonction, calculer la fréquence de sortie d'un chiffre entre 1 et 6 au bout de N tirages (prendre N très grand).

2 Le paradoxe du chevalier de Méré

Est-il avantageux, lorsqu'on joue au dé, de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 fois le dé ? Est-il avantageux de parier sur l'apparition d'un double-six, quand on lance 24 fois deux dés ? Le chevalier de Méré, qui était un grand joueur, avait remarqué que le premier jeu était avantageux. Se laissant abuser par un soi-disant argument d'homothétie, le chevalier considérait que le deuxième pari était aussi avantageux : en lançant un dé, il y a 6 issues ; en lançant deux 2 dés, il y en a 36, soit 6 fois plus. Puisqu'il est avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant le dé 4 fois de suite, il doit être avantageux de miser sur l'apparition d'un double-six en lançant un dé $24 = 4 \times 6$ fois de suite. Malheureusement pour le chevalier, les règles des probabilités sont plus complexes, et c'est Pascal qui calcule la vraie probabilité, très légèrement inférieure à $1/2$: le deuxième jeu n'est pas avantageux !

Exercice 5 En effectuant un grand nombre de simulation des deux jeux précédents, vérifier que le premier jeu est avantageux alors que le second ne l'est pas, contrairement à l'intuition du chevalier de Méré.

3 Le problème des anniversaires

L'exercice suivant s'interroge sur la probabilité que deux individus d'une certaine assemblée aient la même date d'anniversaire.

Exercice 6 Soit une assemblée de N individus dont aucun n'est né un 29 février. En effectuant un grand nombre d'expériences avec l'instruction rand de `Scilab`, donner une valeur approchée de la probabilité que dans cette assemblée, au moins deux individus soient nés le même jour.

1. Calculer cette probabilité pour $N = 24$. On pourra représenter graphiquement l'évolution au cours du calcul de l'approximation de cette probabilité obtenue en fonction du nombre d'expériences déjà réalisées.
2. Mêmes questions pour $N = 35$. Commenter.