Maths/Ordi, TP 7: introduction à Maxima

1 Prise en main

1.1 Ouverture d'une feuille de travail Maxima `TD1.wxm`

1. Ouvrir le logiciel wxMaxima.
   Une fenêtre s'ouvre. On l'appellera "Feuille de travail".

2. Aller dans le menu déroulant `Fichier` et cliquer sur `Sauver une session`. Aller dans le répertoire voulu et indiquer le nom voulu (par exemple, `TD1` dans le répertoire "MA450"). La feuille sera ainsi sauvegardée sous le nom "`TD1.wxm`".

3. S'il s'agit de votre ordinateur personnel : à chaque fois que vous ouvrirez Maxima sur cet ordinateur, vous pourrez ouvrir le fichier `TD1.wxm` en allant dans le menu déroulant `Fichier` et en cliquant sur `Ouvrir une session` (ou éventuellement `Ouvrir un fichier récent`). Sinon, envoyez-vous votre fichier par mail.

1.2 Généralités

Vous pouvez à présent commencer vos calculs.

1. Appuyez sur la touche "Entrée" de votre ordinateur. Il apparaîtra une ligne pour entrer les commandes. Ces lignes commencent par "$-->$".

2. Taper la commande "`1+2`".

3. Pour signaler la fin d'une entrée de commande avec affichage, appuyez simultanément sur les touches SHIFT et ENTREE (un point-virgule apparaît)

4. Il s'inscrit alors sur la ligne de commande "(% i1) 2+3;", la lettre i signifiant "input" pour indiquer qu'il s'agit d'une entrée de l'utilisateur et le nombre (ici 1) signifie qu'il s'agit de la première entrée.

5. En dessous, vous avez la ligne de sortie qui indique le résultat : "(% o1) 5", la lettre "o" signifiant "output".

6. Si vous désirez que Maxima calcule votre résultat sans l'afficher, tapez après votre calcul le signe dollar "$" suivi de l'appui simultané sur SHIFT et ENTREE.

1.3 Arithmétique

Taper les commandes suivantes et comprendre ce qu'elles représentent:

−− > `1/100+1/101;`
−− > `(1+sqrt(2))^5;`
−− > `(1+sqrt(2))**5;`
−− > `expand(%);`
−− > `%,numer;`
−− > `bfloat(%);`
−− > `fpprec;`
−− > `fpprec:20;`
−− > `bfloat(%ik)`(Remarque : k représente le numéro de l'entrée "`(1+sqrt(2))^5;`")
−− > `%e +2`
−− > `bfloat(%)`
−− > `exp(3)`
−− > `4*%`
−− > `log(%e)`

Remarque :

1. les constantes mathématiques π, e, i, sont précédées dans Maxima par un signe "%" : $\%pi$, $\%e$ ou $\%i$ respectivement. Le symbole "∞" s'écrit `inf`.

2. Attention, le logarithme néperien s'écrit sous la forme anglaise "log".

3. La ligne continue qui apparaît permet de savoir où la ligne d'entrée se fera lorsque vous taperez sur "ENTREE". Cela permet de revenir à d'anciens calculs.

1.4 Affectation

1. (a) Pour affecter une valeur à une variable, on utilise ":"

   $-- >$ `x:2`;
   $-- >$ `x+3`

   La variable x sera alors toujours égale à 2.

   (b) pour réaffecter une valeur à x, il suffit de recommencer avec une autre valeur.
   $-- >$ x:3

   (c) pour libérer la variable x, on tape
   $-- >$ `kill(x)`

2. Pour affecter une fonction (ou une suite), on utilise ":="
   $-- > f(x) := x^2 + 3$
   $-- >$ f(2)

1.5 Tableau (ou liste ordonnée)

Principe général : les termes d'un tableau sont séparés par une virgule et encadrés par des crochets.
`create_list` permet de définir une liste (ordonnée) à partir d'une formule ; `cons(...)` et `endcons(..)` permettent de rajouter des termes en début ou fin de tableau

$-- >$ `u:[1,4,-3,%e]`
$-- >$ `u[3]`
$-- >$ `v:create_list(2**k,k,3,6)`
$-- >$ `v:cons(2**2,v)`
$-- >$ `v:endcons(2**7,v)`

1.6 Opérations sur les polynômes

1. Affecter l'expression $(x+3*y+x^2*y)^2$ à P après avoir libéré la variable "x".

2. Développer P avec `expand(P);`

3. Factoriser : `factor(%)`

4. Remplacer x par $\frac{5}{z}$ dans P avec `subst(5/z,x,p)`
5. Réduire au même dénominateur avec `ratsimp(%);`

1.7 Résolutions d'équations

La commande `algsys([p1,p2,...],[x1,x2,...])` permet de résoudre le système $p1(x1, x2, ...) = 0, p2(x1, x2, ...) = 0, ...$ où pi sont des polynômes de variables xi.
La commande `allroots(poly)` donne les racines d'un polynôme.
La commande `solve(expr,var)` permet de résoudre des équations algébriques.
La commande `linsolve([L1,L2,...],[x1,x2,...])` permet de résoudre des systèmes linéaires.
La commande `find_roots(expr=0,x,a,b)` permet de résoudre numériquement l'équation $expr = 0$ d'inconnue x en cherchant une solution entre a et b.

1. Résoudre le système

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$
$$x + y = 0 \tag{2}$$

2. Résoudre $x^4 - 1 = 0$.
3. Résoudre $\cos(x)^3 - 1 = 0$
4. Résoudre $\cos(x)*\sin(x)-1 = 0$ avec `solve`. Que se passe-t-il ? Utiliser la commande `S:trigreduce(cos(x)*sin(x))` puis `solve(S-1,x);`
5. Résoudre

$$x + y - z = 2 \tag{3}$$
$$2x + 2y + 3z = a \tag{4}$$
$$3x + 4y + z = 2 \tag{5}$$

puis

$$x + y - z = 2 \tag{6}$$
$$x + 2y + 3z = a \tag{7}$$
$$3x + 4y + z = 2 \tag{8}$$

2 Analyse

2.1 Etude de fonctions

La commande `diff(f(x),x)` permet de calculer la dérivée de f par rapport à x
La commande `expr:diff(f(x),x,n)` permet de calculer la dérivée n-ème de f par rapport à x et de l'affecter à *expr*.
La commande `taylor(f(x),x,x0,n)` calcule le développement de Taylor de $f(x)$ à l'ordre n en $x0$. La commande `lim(f(x),x,x0)` calcule la limite de $f(x)$ quand x tend vers $x0$. La commande `at(f,x=x0)` permet de calculer $f(x_0)$.
La commande `wxplot2d([f(x),g(x)],[x,a,b])` permet de tracer les courbes de f et g sur $[a, b]$ sur une même figure.
Remarque : on obtient une expression à l'aide de la commande `diff` et non une fonction. Pour transformer une expression en fonction, on utilise la commande `define(f(x),expr);`

1. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto e^{x^2} * \cos(x) + x^2 + 3 * x$, puis sa dérivée seconde.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x}$.

3. Taper les commandes suivantes

```
--> limit((cos(x)+1)/x,x,inf);
--> limit((1/x),x,0,plus);
--> limit((1/x),x,0,minus);
--> limit((1/x),x,0);
```

4. Taper `wxplot2d(`$[\sin(x), x^2$`,[x,-5,5]);`.

2.2 Intégrale, équations différentielles

La commande `integrate(f(x),x)` permet de calculer une primitive de f en fonction de x.
La commande `integrate(f(x),x,a,b)` permet de calculer $\int_a^b f$.
La commande `ode2(expr,y,x)` permet de résoudre des équations différentielles (avec la commande `'DIFF`)

1. (a) Calculer une primitive de $x \mapsto \cos(x)\sin^4(x)$, puis celle de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)+\ln(x)}$.
   (b) Calculer $\int_3^4 \ln(x)dx$.
   (c) Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$
2. (a) Taper `ode2('diff(y,x,2)+'diff(y,x)+y,y,x)`.
   (b) Résoudre $y' + 3y = 2x + 3$.

2.3 Suites

Taper les commandes suivantes :

```
-- > u(n):=(%e^ (-n)+1)/(%e^ (2*n)+4));
-- > u(5);
-- > v(n):=if n=0 then 10 else bfloat((v(n-1))^ 2+9)/(2*v(n-1);
-- > v(2)
-- > nuage :makelist([n,v(n)],n,0,10)
-- > wxplot2d([discrete,nuage],[style,points]);
```

3 Quelques exercices.

Exercice 1
Résoudre l'équation $x^3 - 5x^2 - 2 = 0$. Donner une valeur approchée de la première solution donée.
Exercice 2
Calculer une primitive des fonctions suivantes : $x \mapsto \frac{\sin(x)\tan(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)^2}$ et $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

Exercice 3
Calculer $\int_0^1 e^{-t^2} dt$. Donner une valeur approchée de l'intégrale.
Exercice 4
Donner des équivalents simples de

$$e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} \text{ en } 0$$

puis

$$(\cos(x))^{\sin(x)} - \cos(x)^{\tan(x)}) \text{ en } 0$$