Maths/Ordi, TP 8: algèbre linéaire avec Maxima

Ce TP est relatif à l'utilisation de *Maxima* en algèbre linéaire. Il comprend quelques exercices d'application pouvant être résolus avec *Maxima*. Il peut aussi être intéressant de tester *Maxima* sur les feuille de TD d'algèbre linéaire du module MA300.

Sauf indication contraire, on utilisera au maximum *Maxima* pour effectuer les calculs. Il pourra aussi être utilisé pour vérifier des calculs effectués à la main.

Notations: Si $f : E \to E'$ est linéaire, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de E' on note $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)$ la matrice qui représente f dans ces bases. Sa k-ième colonne est constituée des coordonnées de l'image par f du k-ième vecteur de $\mathcal{B}$ décomposée selon la base $\mathcal{B}'$.
Si $g : E \to E''$ est linéaire et $\mathcal{B}''$ une base de E'' on a alors la relation de Chasles

$$M_{\mathcal{B}''\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'}(g)\, M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f).$$

En particulier si $f : E \to E$ est un endomorphisme et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de E, alors on a la *formule de changement de base*

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_E)\, M_{\mathcal{B}}(f)\, M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_E).$$

La matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_E)$ est la *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On la note aussi $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Sa k-ième colonne est donc constituée des coordonnées du k-ième vecteur de $\mathcal{B}'$ décomposé selon la base $\mathcal{B}$.

Exercice 1. Résolution de systèmes linéaires.

1. Résoudre avec *Maxima* le système linéaire $Ax = b$ dépendant d'un paramètre réel m, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre ensuite ce système sur une feuille. Que constatez-vous ?

Exercice 2. Changement de bases.
On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. Soit $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,1,1)$ trois vecteurs de E.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de E, notée $\mathcal{B}'$. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'}$.

2. Soit x le vecteur de E dont les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ sont $(2,3,4)$. Quelles sont ses coordonnées dans la base canonique?
   Soit $y = (1,2,3)$ un vecteur de E. Quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$?

Exercice 3. Matrices d'une application linéaire.
Soit $f : (x,y) \mapsto (x+y, 2x-3y, 3x-y, y)$ une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B}_c^2$ et $\mathcal{B}_c^4$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement et $\mathcal{D}^2 = (u_1, u_2)$ où $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (0,2)$, $\mathcal{D}^4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ où $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,1)$, et $v_4 = (1,1,1,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{D}^2$ et $\mathcal{D}^4$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement.

2. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ (à l'aide de *Maxima*).

3. Déterminer et rentrer sous *Maxima* la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement.

4. Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B}_c^2,\mathcal{D}^2}$ et $P_{\mathcal{B}_c^4,\mathcal{D}^4}$.

5. En déduire la matrice de f dans les bases $\mathcal{D}^2$ et $\mathcal{D}^4$ respectivement.

Exercice 4 Application linéaire définie par une matrice.
On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère $u_1 = e_2 + e_3$, $u_2 = e_3 + e_1$, $u_3 = e_1 + e_2$ et $u_4 = -3e_1 + 5e_2 + e_4$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit f l'endomorphisme défini par la donnée de sa matrice A le représentant dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.
   (a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, expliciter $f(x, y, z, t)$.
   (c) Calculer le noyau et l'image de f ainsi que leurs dimensions. Vérifier le théorème du rang.

Exercice 5. Réduction d'une matrice, applications.
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'application linéaire définie par $f(e_1) = -4e_1 + 6e_2 - 3e_3$, $f(e_2) = 4e_1 - 3e_2 + 2e_3$ et $f(e_3) = 14e_1 - 16e_2 + 9e_3$. On notera id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et Id la matrice identité de taille 3.

1. Diagonalisation.
   (a) Donner la matrice A de f dans la base canonique.
   (b) Calculer le polynôme caractéristique de A.
      i. Montrer que ses racines sont égales à $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.
      ii. Pour chaque i, donner la dimension puis un vecteur non nul u_i de $Ker(f - \lambda_i Id)$
      iii. Vérifier que (u_1, u_2, u_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
      iv. Taper la commande `eigenvalues(A);` et `eigenvectors(A);` Interpréter les résultats donnés.
   (c) Ecrire la matrice C de f dans la base (u_1, u_2, u_3) sans aucun calcul.
   (d) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base (u_1, u_2, u_3) et en déduire son inverse.
   (e) Ecrire une relation simple entre A, P, C. On dit qu'on a diagonalisé (ou réduit) A.

2. Applications.
   (a) Essayer de calculer avec *Maxima* A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le résultat est-il exploitable ?
   (b) i. Montrer (sans *Maxima*) que $A^n = PC^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
      ii. Calculer A^n avec cette relation (sur papier puis avec *Maxima*).
      iii. Vérifier votre formule en calculant A^6 de deux façons différentes.