Université de Versailles
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA350.html`

Année 2014-2015
semestre 1

Maths/Ordi, TP 9: analyse avec Maxima

L'objectif de ce TP est d'utiliser *Maxima* comme aide pour la résolution d'exercices classiques d'analyse: résolution d'équations, calcul de dérivées, de primitives, de limites, de développements limités, tracé de courbes, etc...

Vous effectuerez les calculs "à la main" demandés sur une feuille séparée. Pensez par ailleurs à structurer votre feuille de calcul *Maxima* (avec numéro des exercices, des questions...).

Sauf indication contraire, on utilisera au maximum *Maxima* pour effectuer les calculs. Il pourra aussi être utilisé pour vérifier des calculs effectués à la main.

Exercice 1. (*résolution d'équations*)
Résoudre l'équation $x^3 - 5x^2 - 2 = 0$. Donner une valeur approchée de la première solution donnée par Maxima. Comparer en utilisant `find_root(`$x^3 - 5x^2 - 2 = 0, x, a, b$). Tester avec différentes valeurs de a et b

Exercice 2. (*calcul de dérivées*)

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \ln(x^3 + ax + 1)$ où a est un paramètre réel.
2. Soient $f : x \mapsto x^5$ et $g : x \mapsto \ln x$. Calculer la dérivée de $g \circ f$.

Exercice 3 (*calcul de primitives*)
Calculer une primitive des fonctions suivantes:

$$x \mapsto \sin(x)\tan(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x) - (\cos(x))^2}$$

et $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

Exercice 4 (*calcul d'intégrales*)
Calculer $\int_0^1 e^{-t^2} dt$. Donner une valeur approchée de l'intégrale.

Exercice 5 (*calcul d'aires*)

Soient $g, h : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ définies par $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

1. Vérifier sur un graphique que $g(x) \geq h(x) \geq 0$ si $x \in [0, 1]$.

2. Calculer l'aire comprise entre les courbes représentatives de$g$ et h sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 6 (*calcul d'équivalents*)
Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes:

1. $2e^x\sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ en 0.

2. $\cos(x)^{\sin(x)} - \cos(x)^{\tan(x)}$ en 0.

3. $\sqrt{x^2+1} - 2 \times \sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ en $+\infty$.

Exercice 7 (*calcul de développements limités*)
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh(x) - 1}$$

si $x \neq 0$ et l sinon.

1. Trouver la valeur de l afin que f soit continue en $x = 0$. Dans la suite, on donne à l cette valeur.

2. Montrer, en utilisant la définition de dérivée, que f est dérivable en $x = 0$. Est-ce que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$? Autrement dit, sa dérivée f' est-elle continue?

3. On assume que f est dérivable jusqu'à l'ordre 3 en $x = 0$. Montrer, en utilisant un développement limité à l'ordre 3 centré en $x = 0$ que la tangente à la courbe représentative de f en $x = 0$ la traverse.

Exercice 8. (utilisation de Maxima pour une étude de fonction)
On étudie ici une fonction utilisée pour modéliser la vitesse du vent dans le cadre de l'implantation d'éoliennes. L'intégralité de cet exercice se résout à l'aide du logiciel de calcul formel Maxima.
Soit la f fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{18} x e^{-\frac{x^2}{36}}.$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, les unités graphiques étant de 0,5cm sur l'axe des abscisses et de 10cm sur l'axe des ordonnées.

1. Définir dans Maxima la fonction f et calculer à l'aide du logiciel $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2. (a) A l'aide du logiciel Maxima, calculer $f'(x)$, factoriser son expression et définir cette expression comme la fonction $f1$.
(On donne le nom $f1$ à la fonction dérivée car Maxima n'accepte pas le nom f'.)

   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0, +\infty[$ et donner le tableau de variation de f. On y fera figurer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du maximum de la fonction f.

3. (a) Avec Maxima, calculer le développement limité de $f(x)$, à l'ordre 3, au voisinage de zéro.

   (b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, et la position relative de T et de C au voisinage de ce point.

4. (a) Avec le logiciel, calculer $f''(x)$ et résoudre $f''(x) = 0$. On appellera a la solution strictement positive de cette équation. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de a, de $f(a)$ et de $f'(a)$.

   (b) En déduire une équation de la tangente T' à la courbe C au point d'abscisse a et étudier la position relative de T' et de C.

Exercice 9. Soit

$$f(x) = \arctan(x) - \frac{ax + bx^3 + cx^5}{1 + dx^2 + ex^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les réels a, b, c, d et e de sorte que f soit un infiniment petit en 0 d'ordre le plus élévé possible, puis majorer $|f|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 10. Un rail rectiligne de chemin de fer de 5 km de long fixé sur un sol plan par ses extémités, subit une dilatation qui augmente sa longueur de 1 mm. Il se courbe alors dans un plan vertical en prenant la forme d'un arc de cercle. Calculer la hauteur au dessus du sol du point le plus haut de cet arc de cercle.

Exercice 11. Trouver le développement asymptotique à l'ordre trois du terme général de la suite définie par

$$u_n = \cos(n^2 \pi \ln(1 - 1/n)).$$

En déduire la limite de la suite.