Université de Versailles
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA350.html

Année 2014-2015
semestre 1

MA350, EXAMEN FINAL

Les programmes Scilab et/ou Maxima seront implémentés sur votre ordinateur puis envoyés à l'adresse `laurent.dumas@uvsq.fr` *à la fin de l'examen.*

L'ensemble des programmes Scilab (respectivement Maxima) sera envoyé sous la forme d'un seul fichier dénommé MA350-n.sci (respectivement MA350-n.wxm) où n représente votre numéro d'anonymat.

Une copie manuscrite sera également rendue en complément pour expliquer la démarche et éventuellement résoudre les exercices.

Les doubles licences rendent l'exercice 1 et l'exercice 2.

Les licences maths rendent l'exercice 1 ou l'exercice 2 (au choix) et l'exercice 3 (obligatoire).

Exercice 1 Soit $t \mapsto y(t)$ la solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec $y(0)$ donné. On cherche à approcher y sur $[0, T]$. Pour cela, on construit pour tout $N \in \mathbb{N}$, la suite d'approximations :

$$y_n \simeq y(n\frac{T}{N}), \quad 0 \leq n \leq N$$

de la manière suivante :

$$\begin{cases} y_0 = y(0) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{T}{N} f((n+1)\dfrac{T}{N}, y_{n+1}) \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \tag{1}$$

A noter que le calcul de y_{n+1} à partir de y_n nécessite la résolution de l'équation d'inconnue y :

$$y = y_n + \frac{T}{N} f((n+1)\frac{T}{N}, y) \tag{2}$$

1. Implémenter la méthode précédente avec Scilab. Les paramètres du programme seront f, T et N. On utilisera l'instruction `fsolve` pour résoudre l'équation (2) pour tout n.
2. Appliquer l'algorithme précédent pour résoudre sur $[0, 10]$ l'équation différentielle suivante :
$$y' + 2\cos(3t)y = 1$$
avec $y(0) = 1$. Tracer les solutions obtenues pour $N = 10, 100$ et 1000.
3. Comparer graphiquement les résultats précédents avec la solution obtenue par l'instruction `ode`

Exercice 2 Pour résoudre un système linéaire du type $Ax = b$ où $A = [a_{i,j}]$ est une matrice inversible de taille n, on propose la méthode suivante :

Etape 1 : on écrit $A = M - N$ avec M égal à la matrice diagonale ayant la même diagonale que A (et $N = M - A$).

Etape 2 : on construit la suite de vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$: x_0, x_1, ... ,x_k telle que x_0 est un vecteur colonne quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$

1. Donner une condition simple sur A pour que la matrice M soit inversible.
2. Vérifier que l'instruction `M=diag(diag(A))` permet de construire avec Scilab la matrice M demandée.
3. Ecrire un script Scilab permettant de calculer le vecteur x_k à partir des données de n, A, b et x_0
4. Tester la méthode précédente pour la résolution de $Ax = b$ avec :
   (i) A une matrice aléatoire de taille 10×10
   (ii) b un vecteur tel que $b = A(1, 1, 1..., 1)^T$
   (iii) $x_0 = (0, 0, 0, ..., 0)^T$.
   La méthode est elle convergente ?
5. On peut démontrer que la méthode est convergente si pour tout i dans $\{1, .., n\}$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Vérifier ce résultat sur une telle matrice de taille 10 choisie aléatoirement et avec aucune valeur nulle.

Exercice 3 (*toutes les questions de cet exercice sont indépendantes et seront résolues avec Maxima*)

1. Calculer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de A^n à partir de l'expression de A sous sa forme réduite.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2x}y = 2$.
3. Résoudre le système d'équations différentielles
$$\begin{cases} x' = x + 2y - 1 \\ y' = -x + 4y \end{cases}$$
   avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 3$. Tracer la solution obtenue.
4. Calculer le développement limité en 0 de la fonction
$$f(x) = \arcsin(e^x - 1) - e^{\arcsin(x)}$$
   .
5. Ecrire une procédure calculant le PGCD de deux nombres a et b par l'algorithme des différences (*on classe a et b par ordre décroissant puis on calcul $c = a - b$ et on remplace a par b et b par c, ainsi de suite jusqu'à obtenir une valeur nulle. Le PGCD est la dernière différence non nulle*).