Maths/Ordi, TP 1: méthodes de quadrature

Cette séance traite du calcul approché d'intégrales à l'aide des méthodes des rectangles à gauche et des trapèzes mais aussi avec l'instruction `integrate` de `Scilab`.

1 La commande `integrate`

La commande `integrate` permet de calculer de manière approchée des intégrales du type $I = \int_a^b f(x)dx$ où f est une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On présente ci-dessous un exemple afin de comprendre le fonctionnement de cette commande.

Exemple 1 Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$ correspondant à la fonction densité d'un variable alétoire gaussienne centrée réduite. On peut montrer qu'il n'existe pas de méthode permettant de calculer explicitement l'intégrale de f sur $[-1, 1]$ (qui représente la probabilité que la variable aléatoire se situe dans un intervalle de type "moyenne $\pm$ ecart type". Cependant, on peut en obtenir une excellente approximation en tapant simplement dans `Scilab` :

```
p=integrate('1/sqrt(2*%pi)*exp(-1/2*x^2)','x',-1,1)
```

On obtient alors $p \simeq 0.6826895$.

Exercice 1 En reprenant l'exemple précédent, tracer à l'aide de l'instruction `integrate` une représentation de la probabilité que la variable X précédente se trouve dans $[-n, n]$ pour tout entier $n \geq 1$ puis tracer une représentation de la fonction de répartition de cette variable aléatoire X : $F(x) = P(X \leq x)$.

2 Méthode des rectangles à gauche

On rappelle la formule utilisée dans la méthode des rectangles à gauche :

$$RG_n = \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i)$$

afin d'intégrer une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ à partir d'une subdivision :

$$x_0 = a < x_1 = a + h < ... < x_i = a + ih < ... < x_n = a + nh$$

et avec $h = \frac{b-a}{n}$. On rappelle aussi l'estimation d'erreur obtenue :

$$|I - RG_n| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{n}$$

si f est C^1 sur $[a, b]$.

1. Programmer la méthode des rectangles à gauche avec Scilab pour une fonction f quelconque.
2. Vérifier la convergence et l'ordre de converge en $O(\frac{1}{n})$ de la méthode pour une fonction de votre choix.

3 Méthode des trapèzes

Afin d'accélerer la vitesse de convergence de la méthode précédente, on propose d'utiliser la méthode des trapèzes qui consiste à calculer :

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$$

On admet que cette fois l'estimation d'erreur est de l'ordre de $O(\frac{1}{n^2})$ si f est C^2.

1. Programmer la méthode des trapèzes avec Scilab pour une fonction$f$ quelconque.
2. Vérifier la convergence et l'ordre de converge en $O(\frac{1}{n^2})$ de la méthode pour une fonction de votre choix.