Maths/Ordi, TP 2: méthodes de résolution de systèmes d'équations

Cette séance traite de la résolution d'équations ou de systèmes d'équations à l'aide des méthodes de dichotomie, de Newton et de la sécante mais aussi avec l'instruction `fsolve` de `Scilab`.

1 La commande `fsolve`

La commande `fsolve` permet de résoudre de manière approchée des systèmes d'équations du type $f(x) = 0$ où f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On présente deux exemples afin de comprendre le fonctionnement de cette commande.

Exemple 1 Soit $f(x) = x^4 + x^3 - 5$. On peut montrer facilement que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle positive x_0 (expliquer comment). Cependant, il n'existe pas de méthode permettant de la calculer explicitement. Mais on peut en obtenir une excellente approximation en tapant simplement dans `Scilab` :

```
deff('y=f(x)','y=x^4+x^3-5'); x0=fsolve(1,f)
```

On obtient alors $x_0 \simeq 1.2961533$. Le premier argument de `fsolve` (ici, le réel 1) correspond à une valeur approchée connue de la solution à calculer permettant à `Scilab` d'initier sa recherche. Dans cet exemple, toute valeur strictement positive convient. À l'opposé, le choix de la valeur 0 donnera une solution fausse ($x_0 = 0$) et le choix d'une valeur négative conduira en général à la solution négative de l'équation $x^4 + x^3 - 5 = 0$ (en l'occurrence $-1.8239745\cdots$). Dans tous les cas, il sera donc préférable de vérifier que la valeur x_0 trouvée par `Scilab` est dans le domaine recherché (ici $\mathbb{R}^+$) mais aussi qu'elle est bien solution en vérifiant que $f(x_0)$ est proche de zéro.

Exemple 2 Soit $f(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2^3 - 3, x_1^2 + x_2^2 - 2x_2)$. On peut montrer que le système d'équations $f(x_1, x_2) = (0, 0)$ admet une unique solution dans le quart de plan $(x_1 > 0, x_2 > 0)$. Afin d'en obtenir une approximation, on peut taper dans `Scilab` :

```
deff('y=f2(x)','y=[x(1)^3+x(2)^3-3,x(1)^2+x(2)^2-2*x(2)]');
x=fsolve([1,1],f2) f(x)
```

On obtient alors $x \simeq (0.9587068, 1.2843962)$ et $f(x) \simeq (-0.4440892\,10^{-15}, 0)$ ce qui confirme la pertinence de la solution obtenue.

2 Méthodes de résolution d'équations scalaires

Exercice 1 Montrer graphiquement avec `Scilab` que l'équation

$$\cos(x) - x = 0,$$

a une unique solution $x > 0$. Tester les trois méthodes : dichotomie, point fixe et Newton pour obtenir une valeur approchée de la solution. Comparer les résultats avec la solution donnée par l'instruction `fsolve`.

Exercice 2 Comparer la vitesse de convergence des méthodes de dichotomie et de Newton sur l'exemple de l'équation $x^3 - x = 0$ sur l'intervalle $[0.5, 2]$.

3 Calcul d'une position par GPS

Le GPS est un système de positionnement basé sur le connaissance avec une grande précision de la distance du récepteur à trois satellites (situés à des orbites de l'ordre de $28\,000\,km$).

Le recepteur (assimilé à un point P) reçoit d'un satellite S_1 des informations permettant de calculer sa distance d_1 à ce satellite. Notons $\Omega_1(d)$ l'ensemble des points de la terre à la distance d_1 du satellite S_1. On sait donc que $P \in \Omega_1(d_1)$. L'utilisation d'un deuxième satellite permet de dire que $P \in \Omega_1(d_1) \cap \Omega_2(d_2)$. Comme l'intersection de "courbes de niveaux" $\Omega_1(d_1)$ et $\Omega_2(d_2)$ n'est réduite à un seul point que dans le cas exceptionnel où ces courbes sont tangentes, l'utilisation d'un troisième satellite est nécessaire (et suffisante !) puisque

$$\Omega_1(d_1) \cap \Omega_2(d_2) \cap \Omega_3(d_3) = \{P\}.$$

Exercice 3 On suppose qu'à l'instant où les distances sont calculées, les trois satellites ont les positions suivantes dans un repère cartésien dont l'origine est le centre de la terre :

$$\begin{array}{rcl}
S_1 & = & (-11\,716.227\,778\,km,\ -10\,118.754\,628\,km,\ 21\,741.083\,973\,km) \\
S_2 & = & (-12\,082.643\,974\,km,\ -20\,428.242\,179\,km,\ 11\,741.374\,154\,km) \\
S_3 & = & (\quad 14\,373.286\,650\,km,\ -10\,448.439\,349\,km,\ 19\,596.404\,858\,km).
\end{array}$$

Les distances respectives au récepteur ont été calculées et valent

$$d_1 = 22\,163.847\,742\,km, \quad d_2 = 21\,492.777\,482\,km, \quad d_3 = 21\,492.469\,326\,km.$$

Calculer avec la commande `fsolve` la position exacte P du récepteur. Que représente $\|P\|_2$? (On rappelle que le rayon de la terre est d'environ $6\,400\,km$.)