Maths/Ordi, TP 3: résolution d'équations différentielles

Cette séance traite de la résolution des équations (ou systèmes d'équations) différentielles avec `Scilab`. On rencontre en effet fréquemment de telles équations dans de nombreux domaines (mécanique, chimie, biologie, etc). Après deux exemples de résolution d'équations d'ordre 1 puis 2, un problème de mécanique céleste est abordé.

Premiers exemples de résolution d'équations différentielles Le logiciel `Scilab` permet de résoudre de manière approchée toute équation (ou système d'équations) différentiel du type

$$y' = f(t, y) \tag{1}$$

complétée par la condition initiale $y(t_0) = y_0$ (sous réserve d'existence et d'unicité de la solution). L'instruction correspondante, de type "boîte noire", s'appelle `ode` et nécessite la donnée de quatre arguments : la donnée initiale y_0, le temps initial t_0, les instants de calcul de la solution et la fonction f (toujours à deux arguments t et y). Par exemple, la série d'instructions [1]

```
deff('dy=fct(t,y)','dy(1)=cos(t)*y(2);dy(2)=y(1)-y(2)')
t0=0;y0=[10;2];t=0:0.1:10;
z=ode(y0,t0,t,fct);
```

permet de calculer et de stocker dans la variable z les solutions du système d'équations différentielles (d'inconnues y_1 et y_2) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & \cos(t)y_2(t), \\ y_2'(t) & = & y_1(t) - y_2(t), \\ y_1(0) & = & 10, \\ y_2(0) & = & 2 \end{array} \right.$$

aux instants $t = 0, 0.1, 0.2, \ldots$, jusqu'à $t = 10$. Pour tracer ensuite y_1 en fonction de t, on pourra taper `plot2d(t,z(1,:))`. Même si la fonction f dans l'équation (1) ne dépend pas de la variable t ou de la variable y, il faut quand même la définir commme fonction de ces varaiables. Il est possible de résoudre avec `Scilab` les équations d'ordre supérieur à 1, en récrivant celle ci comme un système d'équations d'ordre 1.

1. La fonction `fct`, définie ici directement dans le script avec l'instruction `deff` peut aussi être définie avec les instructions `function` et `endfunction`.

Exercice 1 Résoudre sur $[0, 10]$ avec la méthode d'Euler l'équation de Bernoulli :

$$y' = -y + ty^2$$

avec la donnée initiale $y(0) = 1$. Commenter graphiquement la vitesse de convergence de la méthode.

Exercice 2 On considère l'équation du pendule pesant : $u'' + \sin(u) = 0$ avec les données initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$. En posant $y = (u, u')^T$, mettre le système différentiel vérifié par y sous la forme (1). Résoudre ce système sur $[0, 10]$. Tracer u et u' en fonction de t.

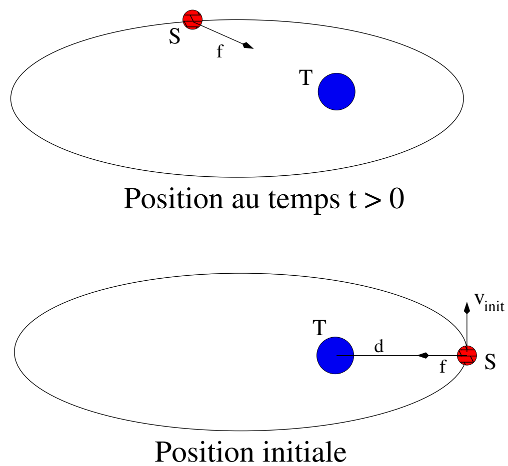

FIGURE 1 – Trajectoire d'un satellite S (O est le centre de la terre).

Trajectoire d'un satellite terrestre On recherche à présent la trajectoire d'un satellite lancé à partir d'une fusée. On rappelle que l'accélération vectorielle $\vec{a}$ d'un satellite terrestre assimilé à un point S et de masse m est donnée par la relation fondamentale de la dynamique $m\vec{a} = \vec{f}$ où la force gravitationnelle $\vec{f}$ est un vecteur porté par la droite SO, dirigé de S vers O (centre de la terre) et de norme égale à $g\frac{m\,M}{OS^2}$ où $g = 6.67\,10^{-11}$ est la constante de gravitation universelle et $M = 5.98\,10^{24}\,kg$ est la masse de la terre.

Exercice 3 Sachant que le satellite a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_{init}$ comme sur la figure 1, à la distance $d = 6\,500\,km$ du centre de la terre[2], calculer sa trajectoire sur une journée et tracer celle-ci pour la vitesse initiale $\|\vec{v}_{init}\| = 8\,000\,m/s$, puis pour la vitesse $\|\vec{v}_{init}\| = 10\,000\,m/s$. Calculer l'apogée de la trajectoire, c'est-à-dire l'éloignement maximal de O. Que se passe-t-il pour $\|\vec{v}_{init}\| = 12\,000$?

2. On considère que le rayon de la terre est de (environ et en moyenne) 6 400 km