MA350, TP 4 Maxima: équations différentielles

Exercice 1 (*issu de session 1, année 2013*)

On désire résoudre l'équation différentielle (ED) suivante :

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \tag{ED}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = -1$.
On pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

On note Y' le vecteur dérivée de Y, c'est-à-dire

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ecrire l'équation (ED) sous la forme matricielle équivalente

$$Y'(t) = AY \tag{3}$$

1. On résout d'abord cet exercice sur feuille.
   (a) Diagonaliser la matrice A sous la forme $A = PDP^{-1}$.
   (b) On pose $Z = P^{-1}Y$. Calculer $Z(0)$ et montrer que $Z' = DZ$.
   (c) Résoudre cette équation, c'est-à-dire trouver l'expression de $Z(t)$ en fonction de t.
   (d) En déduire l'expression de $Y(t)$ puis de $y(t)$.
2. On reprend cet exercice avec Maxima
   (a) Essayer de résoudre directement l'équation (ED) avec Maxima. Qu'obtient-on ?
   (b) Diagonaliser la matrice A avec Maxima
   (c) En posant comme précédemment $Z = P^{-1}Y$, déterminer la valeur de $Z(0)$ puis celle de $Z(t)$ avec Maxima.
   (d) En déduire l'expression de $Y(t)$ puis de $y(t)$. Tracer la solution $t \mapsto y(t)$ sur $[0, 2]$ avec Maxima.

Exercice 2 Le logiciel Maxima permet de tracer les solutions approchées $t \mapsto (x(t), y(t))$ (appelé portrait de phase) d'un système d'EDO quelconque du type :

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

à l'aide des commandes respectives `ode` et `plot` pour Scilab et `plotdf` pour Maxima.

Dans le cas du pendule non amorti pour lequel $\theta'' = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$ où $\theta(t)$ représente l'angle du pendule par rapport à la verticale, représenter le portrait de phase associé avec Maxima en prenant $(x, y) = (\theta, \theta')$.

Exercice 3 *(issu de session 1, année 2014)*

- Résoudre avec Maxima l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2x}y = 2$.
- Résoudre avec Maxima le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 1 \\ y' = -x + 4y \end{cases}$$

  avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 3$. Tracer la solution obtenue.