MA350 et MA350* EXAMEN FINAL, SESSION 2

Les programmes Scilab et/ou Maxima seront implémentés sur votre ordinateur puis envoyés à l'adresse `laurent.dumas@uvsq.fr` *à la fin de l'examen.*

L'ensemble des programmes Scilab (respectivement Maxima) sera envoyé sous la forme d'un ou plusieurs fichiers dénommés par exemple MA350-n-exo1.sci (respectivement MA350-n-exo3.wxm) où n représente votre numéro d'anonymat.

Une copie manuscrite sera également rendue en complément pour expliquer la démarche et éventuellement résoudre les exercices.

Les doubles licences rendent l'exercice 1 et l'exercice 2 (durée de l'épreuve : 1h30).

Les licences maths rendent l'exercice 1 et l'exercice 3 (durée de l'épreuve : 2h).

Exercice 1 On considère le système d'équations différentielles d'inconnues $t \mapsto (x(t), y(t))$ et de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - (b+1)x(t) + ax^2(t)y(t) \\ y'(t) = bx(t) - ax(t)^2y(t) \end{cases} \tag{1}$$

traduisant un système de réactions chimiques faisant intervenir les espèces X, Y, A et B de concentrations respectives $x(t)$, $y(t)$, a et b (ces deux dernières sont donc des constantes indépendantes du temps).

1. Déterminer l'unique point d'équilibre du système (1) (c'est à dire l'unique solution constante du système) en fonction des paramètres a et b.
2. On suppose que $a = 1$ et $b = 1$. Utiliser Scilab et l'instruction `ode` pour illustrer graphiquement le comportement du système pour différentes valeurs de $x(0)$ et $y(0)$. Qu'observe t-on ?
3. On suppose à présent que $a = 1$ et $b = 2.5$. Représenter graphiquement avec Scilab une région du quart de plan $\mathbb{R}^2_+$, contenant le point d'équilibre, où toutes les trajectoires $t \mapsto (x(t), y(t))$ partant de l'intérieur de cette région restent pour tout $t > 0$ dans cette région. Vérifier que dans ce cas, les trajectoires $t \mapsto (x(t), y(t))$ se rapprochent d'un cycle limite qu'on tracera avec Scilab.
4. Implémenter la méthode de Runge Kutta d'ordre 2 suivante :

$$Z_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_n, Z_n) + f(t_{n+1}, Z_n + \Delta t f(t_n, Z_n))\right)$$

pour le système (6) avec $(a, b) = (1, 2.5)$ et $(x_0, y_0) = (0.5, 1)$ sur l'intervalle de temps $[0, 100]$. Comparer graphiquement, pour différents pas de temps, le résultat obtenu avec celui utilisant l'instruction `ode`.

Exercice 2 On cherche à approcher une intégrale du type $I = \int_a^b f(t)dt$ par la méthode suivante :

$$I \simeq I_n = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a + (i + \frac{1}{2})h)$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

1. Ecrire un programme Scilab permettant de calculer I_n pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une fonction f quelconques.
2. On considère la fonction $f(x) = cos^2 x + x^3$. Calculer la valeur exacte de l'intégrale de f entre 0 et π, notée I, puis calculer avec Scilab la valeur approchée I_n associée à l'intégrale précédente pour un valeur de n quelconque et représenter $|I_n - I|$ en fonction de n en double échelle log-log.

Exercice 3 (*toutes les questions de cet exercice sont indépendantes*)

1. Trouver avec Maxima la limite puis un équivalent du terme général de la suite définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \cos(n^2 \pi \ln(1 - \frac{1}{n}))$$

2. Déterminer avec Maxima l'unique solution de l'EDO :

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x + \sin x$$

   telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 4 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   Montrer que A est inversible.
   Déterminer avec Maxima les valeurs propres de A pour $n = 3$, 4 et 5.
   Conjecturer un résultat sur le signe des valeurs propres de A et le démontrer.
4. Déterminer avec Maxima les couples d'entiers naturels consécutifs (a, b) avec $0 \leq a < b \leq 100$ tels que $ab + 1$ soit le cube d'un entier.