Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yveline **2009-2010**

Département de mathématiques **L3 M/MP/MASS**

MA 252 **Mai 2010**

Epreuve d'Optimisation

Durée de l'épreuve : 2 heures. **Nombre de pages :** 2.

N.B. Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 Soient A et b définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $J : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >, \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1) Montrer que J est strictement convexe sur $\mathbb{R}^3$ et que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} J(x) = +\infty$.

2) On considère les trois problèmes d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_i) \qquad \min_{x \in K_i} J(x), \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

où $K_1 = \mathbb{R}^3$, $K_2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 12,\ x_1 + 2x_2 \geq 0\}$ et $K_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 2\}$.

a) Expliquer pourquoi chaque problème $(\mathcal{P}_i)$ admet une unique solution.

b) Résoudre $(\mathcal{P}_1)$. On note $\bar{x}$ sa solution.

c) Montrer que $\bar{x}$ est aussi l'unique solution de $(\mathcal{P}_2)$. Justifier votre réponse.

d) Résoudre le problème $(\mathcal{P}_3)$.

Exercice 2 1) Résoudre le problème de maximisation suivant par la méthode du simplexe

$$\begin{cases} \text{Max} \qquad 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 70 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 60. \end{cases}$$

2) En déduire, en justifiant votre réponse, la valeur du réel M défini par

$$\begin{cases} M = \text{Max} \qquad -70y_1 - 80y_2 - 60y_3 \\ y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0, \ y_3 \geq 0 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 6. \end{cases}$$

Exercice 3 **Question préliminaire :** On considère C une partie non vide convexe de $\mathbb{R}^N$ et A un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

1) Soient $\varphi : C \longrightarrow A$ une fonction strictement concave et $\psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et strictement décroissante.

Montrer que $\psi \circ \varphi$ est strictement convexe sur C.

2) Soient g_1, g_2 deux applications de C dans $\mathbb{R}$. On suppose que g_1 est strictement convexe et g_2 est convexe. Montrer que $g_1 + g_2$ est strictement convexe.

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel $< .,. >$ et de la norme euclidienne $\|.\|$ associée. Etant donné $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, on considère

$$f_a : \Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 < 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f_a(x) := -\ln(1 - x_1^2 - x_2^2) + < a, x > .$$

1) Montrer que f_a est strictement convexe sur Ω. (On pourra utiliser la question préliminaire)

2) On considère le problème de minimisation suivant

$$(\mathcal{P}_a) \qquad \min_{x \in K_a} f_a(x),$$

où $K_a = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4} \text{ et } < a, x > \leq 0\}$.

a) Montrer que $(\mathcal{P}_a)$ admet une solution et une seule.

b) Résoudre $(\mathcal{P}_a)$ pour $a = 0$.

c) On suppose que $a \neq 0$ et on désigne par $\bar{x}$ la solution de $(\mathcal{P}_a)$. Ecrire les conditions (CKT). Montrer que $< a, \bar{x} > < 0$ nécessairement. Calculer $\bar{x}$.