Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2010-2011
Enseignants: L. Dumas, T. Horsin
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651`

CONTROLE CONTINU 2 (non MASS): CORRECTION

Exercice 1.

1) L'ensemble E est un ensemble compact de $\mathbb{R}^3$. En effet, il est borné puisque si $(x, y, a) \in E$, alors $x^2 \leq 1$ et ainsi $x \in [-1, 1]$. Il en va de même pour y et a. Il est fermé car les inégalités définissant E sont larges. En fait, E est l'intersection de deux cylindres de direction orthogonale. Comme la fonction f est continue, alors elle atteint bien ses bornes sur E.

2) Sous réserve de qualification, si (x, y, a) est un minimum de f sur E, alors il existe λ_1 et λ_2 tels que

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,a) + \lambda_1 \nabla g_1(x,y,a) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,a) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 g_1(x,y,a) = 0 \\ \lambda_2 g_2(x,y,a) = 0 \end{cases}$$

avec $g_1(x, y, a) = x^2 + y^2 - 1$ et $g_2(x, y, a) = y^2 + a^2 - 1$, soit:

$$\begin{cases} 2x(1+\lambda_1) = 0 \\ 2y(-1+\lambda_1+\lambda_2) = 0 \\ 2a(1+\lambda_2) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-1) = 0 \\ \lambda_2(y^2+a^2-1) = 0 \end{cases}$$

On a nécessairement $a = x = 0$. Plusieurs cas sont ensuite possibles:

(i) si au moins une des deux contraintes est active alors nécessairement dans ce cas $y^2 = 1$ et $y = \pm 1$. Il suffit donc de prendre $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ avec $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ pour réaliser le système. En ces points f vaut -1. De plus, les contraintes sont qualifiées dans ce cas car leurs gradients sont indépendants.
(ii) si aucune contrainte n'est active, alors $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ et nécessairement $x = y = a = 0$. En ce point f vaut 0. De plus, les contraintes sont qualifiées car aucune n'est active en ce point!

Réciproquement, au vu de la question 1), f atteint son minimum sur E en $(0, 1, 0)$ et en $(0, -1, 0)$ où elle vaut -1. Elle atteint son maximum en $(0, 0, 0)$ où elle vaut 0.

Exercice 2.

1) Il s'agit d'une méthode qui permet de parcourir les sommets de l'ensemble de définition en faisant croitre à chaque fois la valeur associée de la fonction. A partir d'un sommet donné, on définit le nouveau sommet en faisant entrer l'indice de la variable permettant de faire croitre au maximum le critère. La variable sortant de la base d'indices est alors la première variable qui s'annule lorsqu'on se déplace sur l'arête correspondante.

2) On rajoute les variables d'écart x_5 et x_6 pour obtenir la forme canonique du problème. On peut alors démarrer le calcul (sous forme de tableau):

(i) itération 1: sommet $(0, 0, 0, 0, 5, 6)$, valeur de la fonction: 0.

(ii) itération 2: x_3 entre dans la base, x_6 en sort. Nouveau sommet: $(0, 0, 1.5, 0, 2, 0)$, valeur de la fonction: 13.5.

(ii) itération 3: x_2 entre dans la base, x_5 en sort. Nouveau sommet: $(0, 2, 0.5, 0, 0, 0)$, valeur de la fonction: 16.5.

(ii) itération 4: x_1 entre dans la base, x_3 en sort. Nouveau sommet: $(1, 2, 0, 0, 0, 0)$, valeur de la fonction: 17. On s'arrête car l'expression de J en fonction des indices hors base ne comporte que des coefficients négatifs.

Exercice 3.

On rajoute les variables d'écart x_3, x_4, x_5 et x_6 pour obtenir la forme canonique du problème. De même,

(i) itération 1: sommet $(0, 0, 3, 1, 4, 5)$, valeur de la fonction: 0.

(ii) itération 2: x_1 entre dans la base, x_4 en sort. Nouveau sommet: $(1, 0, 1, 0, 2, 1)$, valeur de la fonction: 2. On s'arrête car l'expression de J en fonction des indices hors base ne comporte que des coefficients négatifs.